Michael Schulz
Rechnen-Algebra
5a MNG

Michael Schulz 5aMNG
Rechnen Algebra IV

Übungsserie

1. $$\left.\begin{aligned} ax-4ab+by &= ay-bx \\ ax-by &= bx+ay \end{aligned}\right\}$$

2. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a+b} - (a-b)y &= a-b \\ \frac{x}{a-b} + (a+b)y &= a+b \end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned} \frac{ax}{a-s} - \frac{by}{s-b} &= 1 \\ (s-b)x-(a-s)y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4. $$\left.\begin{aligned} (a-b)x + (a+b)y &= a+b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} &= \frac{1}{a+b} \end{aligned}\right\}$$

5. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - y\cdot\frac{1}{b} &= a-b \\ ax-by &= a^3-b^3 \end{aligned}\right\}$$

6. $$\left.\begin{aligned} a(a-x) &= b(x+y-a) \\ a(y-b-x) &= b(y-b) \end{aligned}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned} \frac{x+a}{b} - \frac{y+b}{a} &= 0 \\ \frac{x+y+b}{a} + \frac{y+b}{b} + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

8. $$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{a+b} &= ab \\ \frac{bx+a^2}{ay} &= 1+\frac{1}{b^2} \end{aligned}\right\}$$

9. $$\left.\begin{aligned} 2(y+b) &= x \\ \frac{x-y-a}{y+b} &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\}$$

10. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{a+b} &= 2a-b \\ x:y &= (a-b):(a+b) \end{aligned}\right\}$$

11. $$\left.\begin{aligned} (a+b)x - ay &= a^2 \\ bx-(a-b)y &= b^2 \end{aligned}\right\}$$

12. $$\left.\begin{aligned} \frac{a-x}{b+y} + \frac{a+x}{b-y} &= 4 \\ \frac{b+y}{a-x} - \frac{b-y}{a+x} &= 2\cdot\frac{b+y}{a-x}\cdot\frac{b-y}{a+x} \end{aligned}\right\}$$

13. $$\left.\begin{aligned} ax &= by + \frac{a^2+b^2}{2} \\ (a-b)x &= (a+b)y \end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} &= 2 \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} &= \frac{2(a+b)}{a-b} \end{aligned}\right\}$$

15. $$\left.\begin{aligned} (a+b)y - 4x &= (a-b)^2 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{a+b} &= b-1 \end{aligned}\right\}$$

16. $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a^2-b^2} + \frac{y}{a+b} &= a+b \\ x - \frac{y}{(a+b)^2} + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

17. $$\left.\begin{aligned} (x+a)b - b(y-b) &= 1+b^2 \\ \left(x+\frac{1}{b}\right)a + \left(y-\frac{1}{b}\right)b &= \frac{2a+ab^2-b}{b} \end{aligned}\right\}$$

18. $$\left.\begin{aligned} a(x+y)+b(x-y) &= 3a-b \\ (a-b)x + \frac{b}{2}y &= a \end{aligned}\right\}$$

136/31a 30a
23b

Michael Schulz Rechnen-Algebra IV 5a MNG

Kaiser

negative Zahlen, 0, natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Brüche, ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

irrationale Zahlen, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

reelle Zahlen $\mathbb{R}$

$\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}} \quad \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Intervallschachtelung

Def.: Es ist eine Folge von Zahlenpaaren, $(x_0, X_0), (x_1, X_1) \ldots (x_n, X_n)$ so gegeben, dass für alle n gilt:

1) $x_n \leq X_n$
2) das Intervall (x_n, X_n) liegt immer ganz im Intervall $(x_n - 1, X_n + 1)$
3) die Länge der Intervalle (x_n, X_n) werden beliebig klein, wenn n gross genug wird.

Dann bezeichnen wir diese Folge von Zahlenpaaren als Intervallschachtelung.

Satz: Jede Intervallschachtelung besitzt höchstens eine innere Zahl.

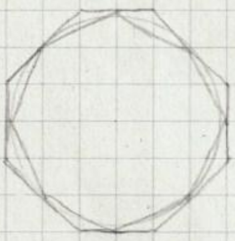
Def.: Gibt es eine Zahl x, die in allen Intervallen enthalten ist ($x_n \le x \le X_n$), dann nennen wir x die innere Zahl.

$$\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow a = \text{inn. Zahl}$$

Besitzt die Intervallschaltung keine inn. Zahl, hat sie also eine Lücke, so stellt sie eine rationale Zahl dar.

Bsp.:

π



$$l_6 \le L_6$$

$$(l_3, L_3), \dots, (l_n, L_n), \dots \Rightarrow \text{inn Zahl } \pi$$

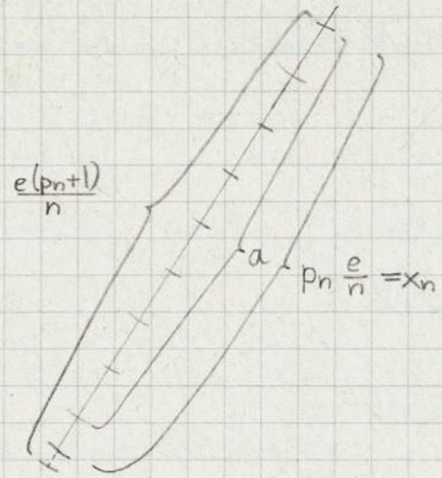
Streckenmessung

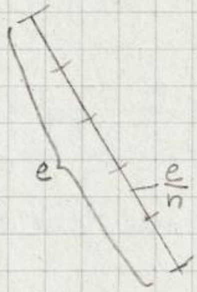
Man hat eine Strecke a, die mit einer Strecke e der Länge 1 gemessen werden soll. Wir bestimmen eine Strecke e_n der Länge $\frac{1}{n}$, welche sich auf e genau n-mal abtragen lässt. Dann bestimmen wir die Zahl p_n so, dass sich die Strecke e_n zwar noch p_n-mal auf a abtragen lässt, aber beim (p_n+1)-maligen Abtragen darüber hinauskommt.

Die Strecke der Länge $p_n e_n = p_n \frac{1}{n} = \frac{p_n}{n} = \text{Def. } x_n$ ist dann kürzer als a, diejenige der Länge $(p_n+1)e_n = \frac{p_n+1}{n} = \text{Def. } X_n$ länger.

Für alle n durchgeführt gibt (x_n, X_n) eine Intervallschaltung.

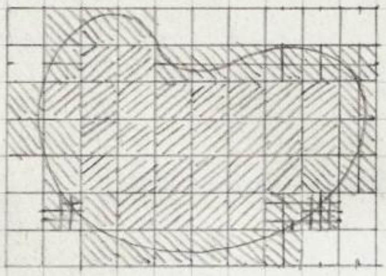
Def.: Die Strecken heissen kommensurabel, wenn diese Intervallschältelng eine innere Zahl hat. Sie heissen inkommensurabel, wenn das nicht gilt.





Flächenmessung

Voraussetzung: Die Fläche hat einen glatten Rand.



s_n $\quad S_n$

1. $s_n < S_n$
2. $S_{n+1} \leq S_n$
3.

Wenn man die straffierten Quadrate weiter unterteilt, gibt es am Schluss immer mehr straffierte Quadrate. Die straffierten Quadrate nähern sich immer mehr der 0.

Dezimalbruchdarstellung

3.471 ....

[3.4] [3.4, 3.5] [3.47, 3.48] [3.471, 3.472] [3.4710, 3.4711]

1) $X_n = x_n + \frac{1}{10^n}$

2) erfüllt

3) erfüllt Differenz $\Rightarrow 0$, da Nenner $\Rightarrow 0$

Jeder (nicht abbrechende) Dezimalbruch ist die abgekürzte Schreibweise einer Intervallschachtelung.

Jede Intervallschachtelung stellt eine reelle Zahl dar und jede reelle Zahl ist durch eine Intervallschachtelung darstellbar.

Die reellen Zahlen sind die rationalen und irrationalen Zahlen zusammen. Für eine reelle Zahl gibt es beliebig viele Intervallschachtelungen

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad pq' = p'q$$

$\left(1-\frac{1}{n}\,;\,1+\frac{1}{n}\right)$ inn. Zahl 1 $(n = \in \mathbb{N})$

$\neq$

$\left(1\,;\,1+\frac{1}{n}\right)$ inn. Zahl 1 $(n = \in \mathbb{N})$

$\mathbb{R}$ (enthalten) $\supset \mathbb{Q}$

$+ = (x_n, X_n) + (y_n, Y_n) \overset{\text{Def.}}{=} (x_n + y_n, X_n + Y_n)$

$\cdot = (x_n, X_n) \cdot (y_n, Y_n) \overset{\text{Def.}}{=} (x_n y_n, X_n Y_n)$

3 5 8

3 5 15

$3, 5 = \in \mathbb{Q}$

$3 + 5 = 8$
$3 \cdot 5 = 15$

A $(1,3)\left(1+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}\right), \left(1+\frac{3}{4}, 2+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{7}{8}, 2+\frac{1}{8}\right)$ inn n-te allg. Glied

B $(2,4)\left(2+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}\right), \left(2+\frac{3}{4}, 3+\frac{1}{4}\right)$ allg. Zahl "

3 7 4 6 $4\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{2}$ $\left(4+\frac{3}{4}\right.$ $\left.5+\frac{1}{4}\right)$

$5-\frac{1}{4}$

A+B

AB

A+B $\left(5-\frac{3}{2^n}, 5+\frac{1}{2^{n-1}}\right.$ inn Zahl "

iteriert inn Zahl "

inn. Zahl A 2, B 3, A+B 5, AB 6

n-te allg. Glied: $A\left(1+\cancel{\frac{n}{n+1}}, 2+\frac{1}{n+1}\right)$

$B\left(2+\frac{n}{n+1}, 3+\frac{1}{n+1}\right)$

$$A \quad 1+\frac{2^n-1}{2^n} = \left(2-\frac{1}{2^n}, 2+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$B\left(3-\frac{1}{2^n}, 3+\frac{1}{2^n}\right)$$

AB $(2,12)\left(3+\frac{3}{4}, 8+\frac{3}{4}\right), \left(4+\frac{13}{16}, 7+\frac{5}{16}\right)\left(5+\frac{25}{64}, 6+\frac{41}{64}\right)$

$$\left(6-\underset{\downarrow 0}{\frac{5}{2^n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{2^{2n}}}, 6+\underset{\downarrow 0}{\frac{5}{2^n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{2^{2n}}}\right) = \left(2-\frac{1}{2^n}\right)\left(3\frac{1}{2^n}\right) = \left(6-\frac{3}{2^n}-\frac{2}{2^n}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}_{\frac{1}{2^{2n}}}\right.$$

Kommutativ $a+b=b+a$ $ab=ba$

assoziativ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $a(bc)=(ab)c$

distributiv $a(b+c)=ac+ac$

Satz: Es gibt reelle Zahlen, Zahlen, die folgende Eigenschaften haben.

1 Man kann sie addieren und multiplizieren und das
- kommutative Gesetz
- assoziative Gesetz
- distributive Gesetz

ist erfüllt. Die Umkehrungsoperationen Subtraktion und Division lassen sich durchführen.

2 Sie enthalten die rationalen Zahlen.

3 Sie sind geordnet, d.h. von je zwei Zahlen steht fest, welche die grössere und welche die kleinere ist.

4 Sie sind vollständig, d.h. jede Intervallschachtelung mit reellen Zahlen hat eine und nur eine innere Zahl.

Satz: Jede reelle Zahl lässt sich durch eine Intervallschachtelung mit rationalen Intervallenden darstellen, und jede solche Intervallschachtelung bestimmt eine reelle Zahl. Die so bestimmte reelle Zahl ist rational, wenn die Schachtelung eine rationale innere Zahl hat, irrational, wenn sie keine rationale Zahl hat.

Speziell lassen sich Intervallschachtelungen als nicht abbrechende Dezimalbrüche verwenden, darstellen.
Die Intervallschachtelung eines periodischen Dezimalbruches stellt eine rationale Zahl dar, diejenige eines nicht periodischen eine irrationale.

Matter

152/84) a $|a|\cdot|b| = ab$

$\wedge$ = „und"
$A \wedge B$: beide Aussagen A, B müssen gleichzeitig gelten.

1. $a>0 \wedge b>0$

$|a|\cdot|b| = ab$

2. $a>0 \wedge b<0$ $\quad |a|\cdot|b| = a\cdot(-b) = -ab$

3. $a<0 \wedge b>0$ $\quad |a|\cdot|b| = (-a)\cdot b = -ab$

4. $a<0 \wedge b<0$ $\quad |a|\cdot|b| = (-a)(-b) = ab$

Beide Vorzeichen müssen gleich sein.

---

b $|a+b| = |a| + |b|$

1. $a>0 \wedge b>0$ $\quad |a|+|b| = a+b = |a+b|$

2. $a>0 \wedge b<0$ $\quad |a|+|b| = a+(-b) = \underbrace{\underbrace{|a - \underbrace{b}_{\text{neg}}|}_{\text{pos}}}_{\text{pos}} \underset{(>)}{\neq} |a+b|$

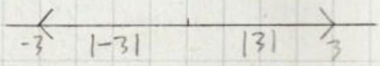
3. $a<0 \wedge b>0$ $\quad |a|+|b| = (-a)+b = \underbrace{\underbrace{-\underbrace{a}_{\text{neg}}}_{\text{pos.}}+b}_{\text{pos.}} = |-a+b| \underset{(>)}{\neq} |a+b|$

4. $a<0 \wedge b<0$ $\quad |a|+|b| = (-a-b = |-a-b| = |-(a+b)|$

Beide Vorzeichen müssen gleich sein.

$|3| = 3$
$|-3| = 3$

Def.: $|a| = \begin{cases} a, \text{ wenn } a \geq 0 \\ -a, \text{ wenn } a < 0 \end{cases}$ $\quad |-3| = -(-3) = 3 \quad a = -3$



$|-3| = |3|$

c) $|a|^5 = a^5$

152/84c $|a|^5 = a^5$

1) $a > 0$ $|a| = a$ $|a|^5 = a^5$

2) $a < 0$ $|a| = -a$

Vorzeichen muss positiv sein.

153/84d) $|a+b| < |a|+|b|$

$a > 0 \wedge b > 0$

$|a+b| = a+b = |a+b|$

$a > 0 \wedge b < 0$
$|a-b| = a-b \leq |a|+|b|$

$a < 0 \wedge b > 0$
$|-a+b| = -a+b < a+b$

$a < 0 \wedge b < 0$
$|-a-b| = -a-b = -(a+b) < |a|+|b|$

$y = ax+b$ $\quad y+a = ax$
$\quad y = ax - a - b$

$\quad y = x^2$ (= graph. aufgelöst = Kurve)

$\underline{y = |x|}$

1) $x \geq 0 \Rightarrow y = x$

2) $x < 0 \Rightarrow y = -x$

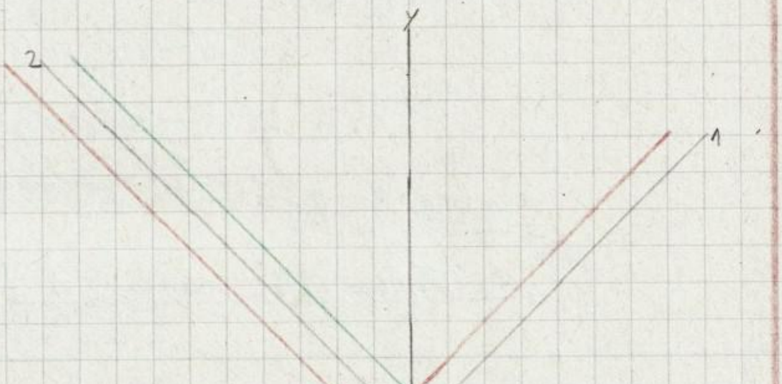
$\underline{y = |x+1|}$

1) $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\Rightarrow y = x+1$

2) $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$\Rightarrow y = -(x+1) = -x-1$



$\underline{y = |x|+1}$

1) $x > 0$

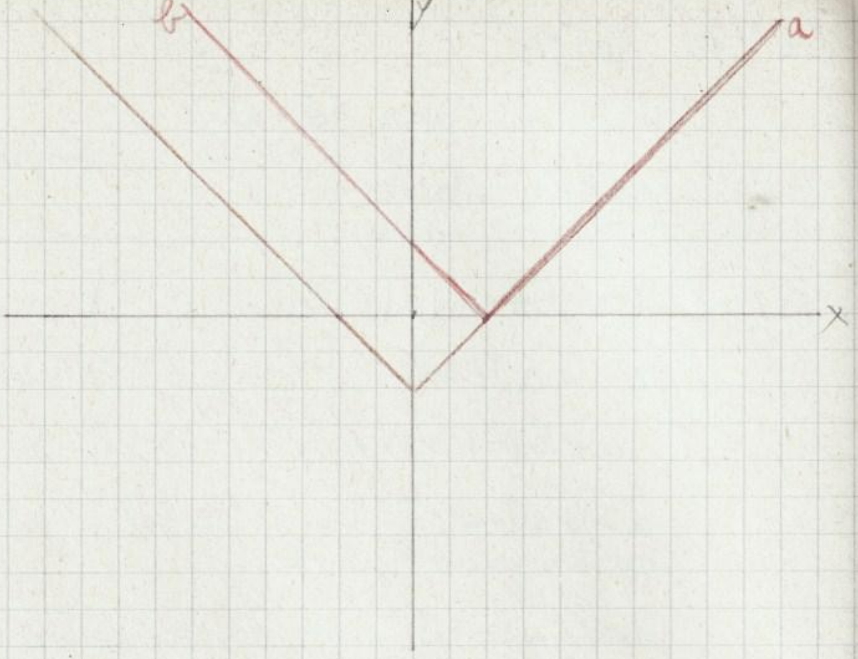
$y = x+1$

2) $x < 0$

$y = -x+1$

1) $y = |x-2|$

2) $y = |x|-2$



1) $y = |x-2|$

a) $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$y = x-2$

b) $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$

$y = -x+2$

2) $y = |x|-2$

a) $x > 0$

$y = x-2$

b) $x < 0$

$y = -x-2$

152/82a
$$\left| \begin{array}{l} ax+(a+b)y+a+2b=0 \\ (a+3b)x+(a+4b)y+a+5b=0 \end{array} \right|$$

$$x = \frac{-a-2b-ay-by}{a}$$

$$-a-2b-ay-by+\frac{-3ab-6b^2-3aby-3b^2y}{a}+ay+4by+a+5b=0 \quad |\cdot a$$

$$-a^2-2ab-a^2y-aby+-3ab-6b^2-3aby-3b^2y+a^2y+4aby+a^2+5ab=0$$

$$-6b^2-3b^2y=0$$

$$-6b^2=3b^2y \quad |:3b^2$$

$$\underline{\underline{y=-2}}$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{-a-2b-ay-by}{a}$$

$$= \frac{-a-\cancel{2b}+2a+\cancel{2b}}{a} = \frac{-a+2a}{a} = \frac{a}{a} = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{1/2\}}}$$

152/82b
$$\left| \begin{array}{l} ax+by+cz=a^2+ac-b^2-bc \\ bx+ay+cz=a^2+ac-b^2-bc \\ cx+by+az=a^2+ac-b^2-bc \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ - \\ - \end{array}$$

$+$ $ax+bx+cx=a^2+ac-b^2-bc$

$x(a+b+c)=a^2+ac-b^2-bc$

$$x = \frac{a^2+ac-b^2-bc}{a+b+c}$$

$$\begin{array}{l} ax+by+cz=a^2+ac-b^2-bc \quad + \\ \underline{bx+ay+cz=a^2+ac-b^2-bc} \quad - \end{array}$$

$ax-bx+by-ay=\cancel{a^2+ac}$

$x(a-b)+y(b-a)=0$

$$x = \frac{y\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}} = y$$

$$\begin{array}{l} ax+by+cz=a^2+ac-b^2-bc \quad + \\ \underline{cx+by+az=a^2+ac-b^2-bc} \quad - \end{array}$$

$ax-cx+cz-az=0$

$x(a-c)+z(c-a)=0$

$$z = \frac{x\cancel{(c-a)}}{\cancel{c-a}} = x$$

$$\underline{\underline{x=y=z}} \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{a^2+ac-b^2-bc}{a+b+c}\right\}}}$$

156/100)

$$\left| \begin{aligned} \frac{x}{a+b} + \frac{3y}{a} &= 3 \\ \frac{x}{3a+3b} - \frac{2y}{a} &= -1 \end{aligned} \right| \cdot 3 \qquad \begin{aligned} y&=1 \\ x&=2 \\ a&=? \\ b&=? \end{aligned} \qquad \left| \begin{aligned} \frac{2x}{a+b} + \frac{6y}{a} &= 6 \\ \frac{x}{a+b} - \frac{6y}{a} &= -3 \end{aligned} \right| \begin{aligned} + \\ + \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{x}{a+b} + \frac{3y}{a} &= 3 \\ \frac{x}{a+b} - \frac{6y}{a} &= -3 \end{aligned} \right| \begin{aligned} + \\ - \end{aligned} \qquad \frac{3x}{a+b} = 3$$

$$\frac{9}{a} = 6 \qquad \frac{6}{1\frac{1}{2}+b} = 3$$

$$6 = 4\tfrac{1}{2} + 3b$$

$$a = 1\tfrac{1}{2} \qquad 3b = 1\tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{L} = \{1\tfrac{1}{2} / \tfrac{1}{2}\}$$

$$b = \tfrac{1}{2}$$

15/78) Mit 3 versch. Ziffern $\neq 0$, können im 10-ersystem 6 versch. dreiziffrige Zahlen geschrieben werden, die zusammengezählt 4440 ergeben. Summe der dritt-, viert- und fünftgrössten 2130, Summe der grössten und drittgrössten 1660. Wie heissen die drei Ziffern?

x y z
x z y
y x z
y z x
z x y
z y x

4440

$x > y > z$

y x z
y z x
z x y

2130

y x z
z y x

1660

x y z
x z y
y x z

2130

x y z
y x z

1660

$x = 8$
$y = 7$
$z = 5$

$$\begin{aligned} &100x + 10y + z \\ &100x + 10z + y \\ &100y + 10x + y \\ &100y + 10z + x \\ &100z + 10x + y \\ &100z + 10y + z \end{aligned}$$

$$222x + 222y + 222z = 4440 \quad |:222$$

$$x + y + z = 20$$

$$201y + 21x + 111z = 2130$$

$$110x + 110y + 2z = 1660$$

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 20 \\ 21x + 201y + 111z &= 2130 \\ 55x + 55y + z &= 830 \end{aligned} \right|$$

Verbesserung

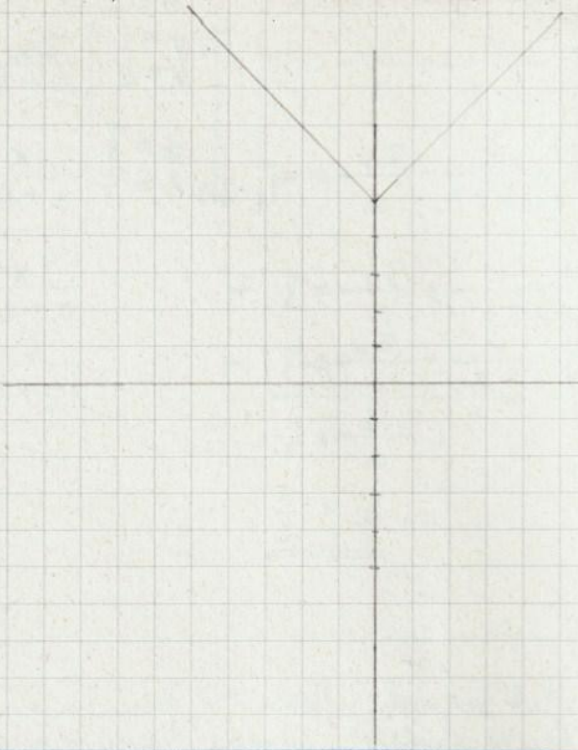
2b) $y = |x+5|$

1. $x+5>0$
$\quad x > -5$

$y = x+5$

2. $x+5<0 \quad x<-5$

$y = -(x+5) = -x-5$



---

3) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{y}{m+p} - \dfrac{z}{m-p} = \dfrac{m^2+p^2}{m^2-p^2} \\ \dfrac{(n-p)y+(m+n)x}{n(m+p)} = 1 \\ \dfrac{x}{m-n} + \dfrac{z}{m+n} = \dfrac{2np}{m^2-n^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(m+p)(m-p) \\ \cdot n(m+p) \\ \cdot(m+n)(m-n) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} y(m-p) - z(m+p) = m^2+p^2 & \\ y(n-p) + x(m+n) = 1(n(m+p)) & + \\ x(m+n) + z(m-n) = 2np & - \end{array}$$

$x(m+n) + y(n-p) = 1(n(m+p))$!

$$\begin{array}{l|l} \underline{x(m+n) + z(m-n) = 2np} & - \\ y(n-p) - z(m-n) = 1-2np & \cdot(m-p) \\ y(m-p) - z(m+p) = m^2+p^2 & \cdot(n-p) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} y(n-p)(m-p) - z(m-n)(m-p) = 1-2np(m-p) & + \\ \underline{y(n-p)(m-p) - z(m+p)(n-p) = m^2+p^2(n-p)} & - \end{array}$$

$\cancel{z(m+p)(n-p) - z(m-n)(m-p) = 1-2np(m-p) - m^2 \mp p^2(n-p)}$

$\cancel{z(mn - mp + np - p^2 - mn + mp - pn + p^2) = 1 - 2mnp - 2np^2 - m^2 - np^2 - p^3}$

$-z(m-n)(m-p) + z(m+p)(n-p) = 1-2np(m-p) - m^2 \mp p^2(n-p)$

$-\cancel{zm} + zn - zm^2 + \cancel{zmp} + zmn - \cancel{znp} + \cancel{zm} + zp + zmn - \cancel{zmp} + \cancel{znp} - zp^2 = 1-2np(m-p) - m^2 + p^2(n-p)$

$zn - zm^2 + 2zmn + zp - zp^2 = 1 - 2np(m-p) - m^2 \mp p^2(n-p)$

$z(n - m^2 + 2mn + p - p^2) = 1 - 2np(m-p) - m^2 \mp p^2(n-p)$

$1(nm+np) - 2nmp - 2np^2 - m^2 - p^2n + p^3$

$$\begin{array}{l|l} x(m+n) + y(n-p) = n(m+p) & + \\ \underline{x(m+n) + z(m-n) = 2np} & - \\ y(n-p) - z(m-n) = n(m+p) - 2np & (m-p) \\ y(m-p) - z(m+p) = m^2+p^2 & (n-p) \end{array}$$

$y(n-p)(m-p) - z(m-n)(m-p) = n(m+p)(m-p) - 2np(m-p)$

$y(n-p)(m-p) - z(m+p)(n-p) = m^2(n-p) + p^2(n-p)$

$$y(n-p)(m-p)-z(m-n)(m-p)=n(m+p)(m-p)-2np(m-p) \quad \Big| \; + $$
$$\underline{y(n-p)(m-p)-z(m+p)(n-p)=m^2(n-p)+p^2(n-p)} \quad \Big| \; - $$
$$-z(m-n)(m-p)+z(m+p)(n-p)=n(m+p)(m-p)-2np(m-p)-m^2(n-p)-p^2(n-p)$$

$$-\cancel{zm}+zn-zm^2+\overset{m}{\cancel{zp}}+zmn+\cancel{znp}+\cancel{zm}+zp+zmn-\cancel{zmp}+\cancel{znp}-zp^2=mn+np+\cancel{m^2n}-\cancel{mnp}$$
$$+\cancel{mnp}-np^2-2mnp+2np^2-\cancel{m^2n}-m^2p-np^2+p^3$$

$$\Rightarrow zn-zm^2+2zmn+zp-zp^2=mn+np-\cancel{2np^2}-2mnp+\cancel{2np^2}-m^2p+p^3$$

$$z(n-m^2+2mn+p-p^2)=mn+np-2mnp-m^2p+p^3$$

135/22a)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{cz}{ab}-2=0 \\ \frac{x}{c}-\frac{ay}{bc}+\frac{z}{b}-2=0 \\ \frac{bx}{ac}-\frac{y}{c}-\frac{z}{a}+2=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot ab \\ \cdot bc \\ \cdot ac \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xb+ya-cz=2ab \\ xb-ya+cz=2bc \\ xb-ya-cz=-2ac \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ + \\ - \end{array} \right| \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c} + \\ \\ - \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} xb-ya+cz=2bc \quad | \; + \\ \underline{xb-ya-cz=-2ac \quad | \; -} \\ 2cz=2bc-2ac \\ 2cz=2c(b-a) \quad |:2c \\ \underline{z=b-a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xb+ya-cz=2ab \quad | \; + \\ \underline{xb-ya-cz=-2ac \quad | \; -} \\ 2ay=2ab+2ac \\ 2ay=2a(b+c) \quad |:2a \\ \underline{y=b+c} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xb+ya-cz=2ab \quad | \; + \\ \underline{xb-ya+cz=2bc \quad | \; +} \\ 2xb=2ab+2bc \\ 2bx=2b(a+c) \quad |:2b \\ \underline{x=a+c} \end{array}$$

135/22c)

$$\left| \begin{aligned} \frac{x}{a+b}+\frac{z}{a+c} &= c-b \\ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c} &= a-c \\ \frac{y}{b+c}+\frac{z}{a+c} &= b-a \end{aligned}\right| \begin{matrix} + \\ - \\ \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a+b}+\frac{z}{a+c} &= c-b && \Big| + \\ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c} &= a-c && \Big| - \\ \hline \frac{z}{a+c}-\frac{y}{b+c} &= (c-b)-(a-c) = \cancel{c}-b-a+\cancel{c} = 2c-b-a && \Big| + \\ \frac{z}{a+c}+\frac{y}{b+c} &= b-a && \Big| + \\ \hline \frac{2z}{a+c} &= 2c-2a && \Big| :2 \\ \frac{z}{a+c} &= c-a \\ \underline{\underline{z}} &= (c-a)(a+c) = \underline{\underline{a^2-a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a+b}+\frac{(c-a)\cancel{(a+c)}}{\cancel{a+c}} &= c-b \\ \frac{x}{a+b}+\cancel{c}-a &= \cancel{c}-b \\ \frac{x}{a+b} &= -b+a \\ \underline{\underline{x}} &= (a-b)(a+b) = \underline{\underline{a^2-b^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}}+\frac{y}{b+c} &= a-c \\ \cancel{a}-b+\frac{y}{b+c} &= \cancel{a}-c \\ \frac{y}{b+c} &= b-c \\ \underline{\underline{y}} &= (b-c)(b+c) = \underline{\underline{b^2-a^2}} \end{aligned}$$

135/22b)

$$\left| \begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}+z &= ab \\ \frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}-\frac{2z}{a^2-b^2} &= 1 \\ \frac{x-y}{a+b}+\frac{4z}{a^2-b^2} &= \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot ab \\ &\cdot (a+b)(a-b) \\ &\cdot (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bx-ay+abz &= (ab)^2 \\ x(a+b)+y(a-b)-2z &= (a+b)(a-b) \\ (x-y)(a-b)+4z &= (a+b)^2 \end{aligned} \left| \begin{matrix} \\ \cdot 2 + \\ + \end{matrix} \right| \begin{matrix} (a-b) \\ \cdot a \\ \end{matrix}$$

x(a-b) - y(a-b) !

$$\begin{aligned} 2x(a+b)+2y(a-b)-4z &= 2(a+b)(a-b) && \Big| + \\ (x-y)(a-b)+4z &= (a+b)(a+b) && \Big| + \\ \hline 2x(a+b)+(x-y)(a-b)+2y(a-b) &= 2(a+b)(a-b)+(a+b)^2 \end{aligned}$$

$$2ax+2bx+ax-\cancel{bx}-ay+\cancel{by}+2ay-2by = 2a+2b+2a^2-2ab+2ab-2b^2+(a+b)^2$$

$$3ax+2bx-ay-2by = 2(a+b)+2(a^2-b^2)+(a+b)^2$$

$$x(3a+2b)-y(a+b) = 2(a+b)+2(a^2-b^2)+(a+b)^2$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)x+(a-b)x+2z &= a^2-b^2+(a+b)^2 \\
ax+bx+ax-bx+2z &= \\
2ax \quad +2z &= 2a^2+2ab \qquad |:2 \\
ax \quad +z &= a^2+ab \\
z &= a^2+ab-ax
\end{aligned}
$$

$bx(a-b)$

$$
b(a-b)x+a(a+b)x+(a-b)abz-2az=(a-b)a^2b^2+a(a^2-b^2)
$$
$$
x(a^2+2ab-b^2)+z(a^2b-ab^2-2a)=a^2b^2(a-b)+a(a^2-b^2)
$$

$$
x(a^2+2ab-b^2)+(a^2+ab-ax)(a^2b-ab^2-2a)=a^2b^2(a-b)+a(a^2-b^2)
$$
$$
x(\qquad) \mp ax(a^2b-ab^2-2a) = -(a^2+ab)(a^2b-ab^2-2a)+a^2b(\quad)+a(\quad)
$$

134/19c)
$$
\left|\begin{array}{l} x+by+cz=d \\ bx-ay-cz=-d \\ cx-by+az=d \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x+by+cz=d & + \\
bx-ay-cz=-d & + \\
\hline
bx+x+by-ay=0 & + \\
cx-by+az=d & + \\
\hline
bx+cx+x-ay+az=d &
\end{array}
\qquad b(x+y)=ay-x \qquad z=b
$$

$$y=\frac{b}{b-c}$$

$$
\left|\begin{array}{l} x+by-z=a \\ x+by+z=a+2b \\ bx+c^2y+cz=ab \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot c + \\ \\ - \end{array}\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{l} cx+bcy-bc=ac \\ bx+c^2y+bc=ab \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot b \\ \cdot c \end{array}
$$

$$-2z=a-\cancel{x}-2b$$

$$\underline{\underline{z=-b}}$$

$$
\left|\begin{array}{l} bcx+b^2cy-b^2c=abc \\ bcx+c^3y+bc^2=abc \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}
$$

$$b^2cy-c^3y-b^2c-bc^2=0$$

$$y(b^2c-c^3) = b^2c-bc^2$$

$$x+b\frac{b}{b-c}-b=a \qquad y = \frac{\cancel{c}b(\cancel{b-c})}{\cancel{c}(b^2-c^2)}=\underline{\underline{\frac{b}{b-c}}}$$

$$x = a-b\frac{b}{b-c}$$

$b)^2$

134/19d) $\left|\begin{array}{l} ax+y+z=a^2 \\ x+ay+z=2a-a^2 \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right|$

$2a-a^2=a^2$

$x+ay+z=x+y+az$ $\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\cancel{\ldots}\}}}$

$\cancel{ax+y+z=x+y+az}$

$$\begin{array}{l} ax+y+z=a^2 \\ x+ay+z=2a-a^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot a \; + \\ - \end{array}\right.$$

$a^2x+az-x-z=a^3-2a+a^2$

$a^2x+ax-x-x=a^3-2a+a^2$

$x(a^2+a-2)=a(a^2-2+a)$

$\underline{\underline{x=a}}$

$ax+y+z=x+y+az$

$ax-x=az-z$

$x(a-1)=z(a-1) \quad |:a-1$

$\underline{\underline{x=z}}$

$a^2+y+a=a^2$

$y=a^2-a^2-a$

$\underline{\underline{y=-a}}$

Verbesserung

1) $\left| \begin{array}{l} ax=by+\frac{a^2+b^2}{2} \\ (a-b)x=(a+b)y \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(a+b) \\ \cdot b \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot(a-b) \\ \cdot a \end{array}\right.$

$$\left| \begin{array}{l} ax(a+b)-by(a+b)=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{2} \\ bx(a-b)-by(a+b)=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$ax(a+b)-bx(a-b)=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{2}$

$x(a-\cancel{b)(a+b)}(a-b)=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{2}$

$x(a^2+\cancel{ab}-\cancel{ab}+b^2)=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{2}$

$(a^2+b^2)x=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{2}$ kürzen, aber wie?

$x=\frac{a+b}{2}$

$y=\ldots$

$$\left| \begin{array}{l} ax(a-b)-ay(a+b)=0 \\ ax(a-b)-by(a+b)=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{2} \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$-ay(a+b)+by(a-b)=-\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{2}$

$y(a-b)(a+b)(a-b)=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{2}$

2) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{s}{ry} + \frac{t}{rz} = 1 \\ \frac{2}{3x} - \frac{5s}{3ry} + \frac{2t}{3rz} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{2s}{ry} - \frac{7t}{rz} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 5 + \\ \\ - \end{array} \left|\begin{array}{l} \\ \cancel{\cdot 5} \\ \cancel{2,3} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot \frac{2}{3} \\ - \\ \\ \end{array}$

$\left|\begin{array}{l} \frac{5}{x} - \frac{5s}{ry} + \frac{5t}{rz} = 5 \\ \frac{5}{x} + \frac{2s}{ry} - \frac{7t}{rz} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$

$-\frac{7s}{ry} + \frac{12t}{rz} = 5$

$\cancel{\left|\begin{array}{l} \frac{10}{3x} - \frac{25s}{3ry} + \frac{30t}{3rz} = 5 \\ \frac{10}{3x} + \frac{4s}{3ry} - \frac{14t}{3rz} = 0 \end{array}\right|} \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$

$\cancel{-\frac{29s}{3ry} + \frac{44t}{3rz} = 5}$

$\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3x} - \frac{2s}{3ry} + \frac{2t}{3rz} = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3x} - \frac{5s}{3ry} + \frac{2t}{rz} = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$

$\frac{3s}{3ry} + \frac{2t}{3rz} - \frac{2t}{rz} = -\frac{1}{3}$

$\frac{s}{ry} - \frac{4t}{3rz} = -\frac{1}{3} \quad |\cdot 7$

$\left|\begin{array}{l} -\frac{7s}{ry} + \frac{\overset{36}{12t}}{3rz} = 5 \\ \frac{7s}{ry} - \frac{28t}{3rz} = -\frac{1}{3} \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$

$\frac{8t}{3rz} = 4\frac{2}{3}$

?

$\frac{8t}{r} = 4\frac{2}{3} \cdot 3rz$

6) $\left|\begin{array}{l} 18 v_1 + 18 v_2 = 21.6 \\ 21.6 + 90 v_2 = 90 v_1 \end{array}\right|$

$180 v_2 = 86.4$

$v_2 = \frac{0.48 \text{ km}}{\text{min.}} = \underline{\underline{480 \text{ m/min}}}$

✓

$v_1 = \frac{0.72 \text{ km}}{\text{min}} = \underline{\underline{720 \text{ m/min}}}$

11) $(a+b)x-ay=a^2$
$bx-(a-b)y=b^2$

$x(a+b)=a^2+ay$

$\underline{\underline{x}}=\frac{a^2+ay}{(a+b)}=\frac{a^2+ab}{a+b}=\frac{a(a+b)}{\cancel{a+b}}=\underline{\underline{a}}$

$\frac{b(a^2+ay)}{a+b}-(a-b)y=b^2$

$b(a^2+ay)-(a-b)(a+b)y=b^2(a+b)$

$a^2b+aby-(a-b)(ay+by)=ab^2+b^3$

$aby-(a^2-b^2)y=ab^2+b^3-a^2b$

$y(ab-a^2+b^2)=b(ab+b^2-a^2)$

$\underline{\underline{y=b}}$

12) $\frac{a-x}{b+y}+\frac{a+x}{b-y}=4 \quad \Big|\,(b^2-y^2)$
$\frac{b+y}{a-x}+\frac{b-y}{a+x}=2\cdot\frac{b+y}{a-x}\cdot\frac{b-y}{a+x} \quad \Big|\,(a^2-x^2)$

$(a-x)(b-y)+(a+x)(b+y)=4(b^2-y^2)$
$(b+y)(a+x)+(a-x)(b-y)=2(b^2-y^2)$

$ab-ay-bx+xy+ab+ay+bx+xy=4b^2-4y^2$
$2ab+2xy=4b^2-4y^2$

$ab+bx+ay+yx+ab-ay-xb+xy=2b^2-2y^2$
$2ab+2xy=2b^2-2y^2$

$2ab+2xy=4b^2-4y^2 \quad |\,+$
$2ab+2xy=2b^2-2y^2 \quad |\,-$

$0=2b^2-2y^2$
$\cancel{2}b^{\cancel{2}}=\cancel{2}y^{\cancel{2}}$
$\underline{\underline{y=\pm b}}$ keine Lösung

1) $$\left| \begin{array}{l} ax - 4ab + by = ay - bx \\ ax - by = bx + ay \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} ax + bx + by - ay = 4ab \\ ax - bx - ay - by = 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x(a+b) - y(a-b) = 4ab \\ x(a-b) - y(a+b) = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(a-b) \\ \cdot(a+b) \end{array} \left| \begin{array}{l} (a+b) \\ (a-b) \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} x(a+b)(a-b) - y(a-b)^2 = 4ab \\ x(a+b)(a-b) - y(a+b)^2 = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right.$$

$$y(a+b)^2 - y(a-b)^2 = 4ab(a-b)$$
$$y(a^2+2ab+b^2) - y(a^2-2ab+b^2) = 4ab(a-b)$$
$$\cancel{a^2y} + 2aby + \cancel{b^2y} - \cancel{a^2y} + 2aby - \cancel{b^2y} = 4ab(a-b)$$

$$\cancel{4ab}y = \cancel{4ab}(a-b)$$

$$\underline{\underline{y = a-b}}$$

$$\begin{array}{l} x(a+b)^2 - y(a+b)(a-b) = 4ab(a+b) \\ x(a-b)^2 - y(a+b)(a-b) = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right.$$

$$x(a+b)^2 - x(a-b)^2 = 4ab(a+b)$$
$$x(a^2+2ab+b^2) - x(a^2-2ab+b^2) = 4ab(a+b)$$
$$\cancel{a^2x} + 2abx + \cancel{b^2x} - \cancel{a^2x} + 2abx - \cancel{b^2x} = 4ab(a+b)$$

$$\cancel{4ab}x = \cancel{4ab}(a+b)$$

$$\underline{\underline{x = a+b}}$$

2) $$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a+b} - (a-b)y = a-b \\ \frac{x}{a-b} + (a+b)y = a+b \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(a+b) \\ \cdot(a-b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - (a-b)(a+b)y = (a-b)(a+b) \\ x + (a-b)(a+b)y = (a-b)(a+b) \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$2x = 2(a^2-b^2) \qquad -2(a^2-b^2)y = 0$$

$$\underline{\underline{x = a^2-b^2}} \qquad \underline{\underline{y = 0}}$$

3) $$\left| \begin{array}{l} \frac{ax}{a-s} - \frac{by}{s-b} = 1 \\ (s-b)x - (a-s)y = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(a-s)(s-b) \\ \cdot a \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot(a-s)(s-b) \\ \cdot b \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} ax(s-b) - by(a-s) = (a-s)(s-b) \\ ax(s-b) - ay(a-s) = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$
$$ay(a-s) - by(a-s) = (a-s)(s-b) \qquad |:(a-s)$$

$$ay - by = s-b$$
$$y(a-b) = s-b$$

$$\underline{\underline{y = \frac{s-b}{a-b}}}$$

$$\begin{array}{l} ax(s-b) - by(a-s) = (a-s)(s-b) \\ bx(s-b) - by(a-s) = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right.$$
$$ax(s-b) - bx(s-b) = (a-s)(s-b) \qquad |:(s-b)$$

$$ax - bx = a-s$$
$$x(a-b) = a-s$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a-s}{a-b}}}$$

4) $$\left| \begin{array}{l} (a-b)x + (a+b)y = a+b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot(a+b)(a-b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a-b)x + (a+b)y = a+b \\ (a-b)x - (a+b)y = a-b \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$2(a+b)y = \cancel{a}+b-\cancel{a}+b$$
$$2(a+b)y = 2b \qquad |:2$$

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{a+b}}}$$

$$2(a-b)x = a+\cancel{b}+a-\cancel{b}$$
$$2(a-b)x = 2a \qquad |:2$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a}{a-b}}}$$

5) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a} - y\cdot\frac{1}{b} = a-b \\ ax - by = a^3 - b^3 \end{array}\right| \cdot ab \cdot a^2$ $\quad \left|\begin{array}{l} ax - \frac{ya^2}{b} = a^3 - a^2b \\ ax - by = a^3 - b^3 \end{array}\right|$

$\left|\begin{array}{l} bx - ay = ab(a-b) \\ ax - by = a^3 - b^3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot a \\ \cdot b \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot b \\ \cdot a \end{array}\right.$

$abx - a^2y = a^2b(a-b)$ | +
$abx - b^2y = b(a^3-b^3)$ | −
$b^2y - a^2y = a^2b(a-b) - b(a^3-b^3)$

$-y(a^2-b^2) = a^2b(a-b) - b(a^3-b^3)$ | :(a-b)

$-y(a-b) = a^2b - b(a^2-b^2)$

$-y(a-b) = \cancel{a^2b} - \cancel{ba^2} - b^3$

$\underline{\underline{y = \cancel{\frac{b^3}{a-b}}}}$

$b^2x - aby = ab^2(a-b)$ | +
$a^2x - aby = a(a^3-b^3)$ | −
$b^2x - a^2x = ab^2(a-b) - a(a^3-b^3)$ |:

$-x(a^2-b^2) = ab^2(a-b) - a(a^3-b^3)$ |:(a-b)

$-x(a-b) = ab^2 - a(a^2-b^2)$

$-x(a-b) = ab^2 - a^3 - \cancel{ab^2}$

$\underline{\underline{-x = \cancel{\frac{a^3}{a-b}}}}$

---

6) $\left|\begin{array}{l} a(a-x) = b(x+y-a) \\ a(y-b-x) = b(y-b) \end{array}\right|$

$\left|\begin{array}{l} \cancel{a}\ ax+bx+by = a^2+ab \\ -ax+ay-by = ab-b^2 \end{array}\right|$

$x(a+b)+by = a^2+ab$ | ·a
$-ax+(a-b)y = ab-b^2$ | ·(a+b)

$aby+(a^2-b^2)y = (2a^2b+a^3-b^3) = a(a^2+ab)+(ab-b^2)(a+b) = a^2(a+b)+(a+b)(ab-b^2)$

$y(ab+a^2-b^2) = (2a^2b+a^3-b^3) \qquad = (a+b)(a^2+ab-b^2)$

$\underline{\underline{y = a+b}}$

$x(a+b)+b(a+b) = a^2+ab$

$x(\cancel{a+b})+b(\cancel{a+b}) = (\cancel{a+b})a$

$x + b = a$

$\underline{\underline{x = a-b}}$

---

5) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a} - y\cdot\frac{1}{b} = a-b \\ ax - by = a^3 - b^3 \end{array}\right| \cdot a^2$

$\left|\begin{array}{l} ax - \frac{a^2y}{b} = a^3 - a^2b \\ ax - by = a^3-b^3 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$

$by - \frac{a^2y}{b} = a^3 - a^2b - \cancel{a^3} + b^3$

$by - \frac{a^2y}{b} = -a^2b + b^3$ | ·b

$b^2y - a^2y = -a^2b^2 + b^4$
$y(b^2-a^2) = -b^2(a^2-b^2)$

$-y(\cancel{a^2-b^2}) = -b^2(a^2-b^2)$

$\underline{\underline{y = b^2}}$

$ax - b^3 = a^3 - b^3$
$ax = a^3 - \cancel{b^3} + \cancel{b^3}$ | :a
$\underline{\underline{x = a^2}}$

8) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{a+b} = ab \\ \dfrac{bx+a^2}{ay} = 1 + \dfrac{1}{b^2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(a+b) \\ \cdot(ay)\cdot b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y = ab(a+b) \\ b^2(bx+a^2) = ab^2y + ay \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y = ab(a+b) \\ b^3x + a^2b^2 = y(ab^2+a) \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} x+y = ab(a+b) \\ b^3x - y(ab^2+a) = -a^2b^2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} x+y = ab(a+b) \\ x - y(ab^2+a) = \dfrac{-a^2b^2}{b^3} \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$y + ab^2y + ay = ab(a+b) - \frac{-a^2b^2}{a^2b^3}$$

$$y(1+ab^2+a) = ab(a+b) + \frac{a}{b}$$

$$by(1+ab^2+a) = ab^2(a+b) - a^2 \quad = y(b\cancel{y} + \cancel{ab^3} + ab) = a^2b^2 + \cancel{ab^3} - a^2$$

$$= y(b+ab) = a^2b^2 - a^2$$

$$y = \frac{a^2b^2 - a^2}{b+ab}$$

$$y = \frac{ab^2(a+b) - a^2}{b(1+ab^2+a)} = \frac{a^2b^2 + ab^3 - a^2}{b + ab^3 + ab}$$

$x = a^2b$
$y = ab^2$

9) $\left|\begin{array}{l} 2(y+b)=x \\ \dfrac{x-y-a}{y+b}=\dfrac{b}{a} \end{array}\right| \cdot (y+b)$

$$\frac{2(y+b)-y-a}{y+b}=\frac{b}{a} \;\Big|\cdot (y+b)a$$

$$2a(y+b)-ay-a^2=b(y+b)$$

$$2a(y+b)-a(y-a)=b(y+b)$$

$$2ay+2ab-ay-a^2=b(y+b)$$

$$y(2a-\cancel{a})+a(2b-a)=b(y+b)=by+b^2$$

$$ay-by = +b^2-a(2b-a)$$

$$y(a-b) = a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)$$

$$\underline{\underline{y=a-b}}$$

$$2(a-\cancel{b}+\cancel{b})=x$$

$$\underline{\underline{x=2a}}$$

*

15

---

10) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a+b}=2a-b \\ x:y=(a-b):(a+b) \end{array}\right| \cdot a(a+b)$

$$\left|\begin{array}{l} x(a+b)=y(a-b) \\ x(a+b)+ay=2a-b \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ll} x(a+b)-y(a-b)=0 & + \\ x(a+b)+ay=2a-b & - \\ \hline -y(a-b)-ay=-2a+b & \end{array}$$

$$-ay-by-ay=-2a+b$$

$$-2ay-by=-2a+b$$

$$-y(2a+b)=-(2a+b)=$$

$$\left|\begin{array}{l} x(a+b)+ay=(2a-b)\cdot a(a+b) \\ x(a+b)-y(a-b)=0 \end{array}\right|\begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$ay+y(a-b)=(2a-b)\cdot a(a+b)$$

$$2ay-by=(2a-b)\cdot a^2+\cancel{ab}$$

$$y(2a-b)=(2a-b)\cdot a(a+b)$$

$$\underline{\underline{y=a(a+b)}}=\underline{\underline{a^2+ab}}$$

$$x:a^2+ab=(a-b):(a+b)$$

$$x(a+b)=(a-b)(a^2+ab)$$

$$x(a+b)=(a-b)a(a+b)$$

$$\underline{\underline{x=a(a-b)}}$$

---

14) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=2 \\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{2(a+b)}{a-b} \end{array}\right|\begin{array}{l} (a+b)(a-b) \\ (a+b)(a-b) \end{array}$

$$\begin{array}{l|l} x(a+b)+y(a-b)=2(a+b)(a-b) & \cdot(a-b) \\ x(a-b)+y(a+b)=2(a+b)^2 & \cdot(a+b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x(a-b)(a+b)+y(a-b)^2=2(a+b)(a-b)^2 & + \\ \text{*}\; x(a-b)(a+b)+y(a+b)^2=2(a+b)^3 & - \\ \hline \end{array}$$

$$y(a-b)(a+b)-y(a+b)(a+b)=2(a+b)(a-b)(a-b)-2(a+b)^3$$

$$y(a^2-2ab+b^2)-y(a^2+2ab+b^2)=2(a^2-b^2)(a-b)-2(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

$$\cancel{a^2y}-2aby+\cancel{b^2y}-\cancel{a^2y}-2aby-\cancel{b^2y}=2(a^3-a^2b-b^2a+b^3)-2(a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3) \;\Big|:2$$

$$-2aby=\cancel{a^3}-a^2b-b^2a+\cancel{b^3}-\cancel{a^3}-a^2b-2a^2b-2ab^2-ab^2-\cancel{b^3}$$

$$-2aby=-4a^2b-4b^2a \;\Big|:2$$

$$aby = 2a^2b + 2b^2a$$
$$\underline{\underline{y}} = 2a - 2b = \underline{\underline{2(a+b)}}$$

$$* \quad x(a-b)\cancel{(a+b)} + 2(a+b)(a+b)\cancel{(a+b)} = 2(a+b)(a+b)\cancel{(a+b)}$$

$$x(a-b) = 2(a+b)(a+b) - 2(a+b)(a+b)$$
$$x(a-b) = \cancel{2(a^2+4ab+2b^2 - 2a^2 + 2b^2}$$
$$x(a-b) = \cancel{4ab + 4b^2 = 4b(a+b)}$$
$$2(a^2+2ab+b^2) - 2(a^2-b^2)$$

$$x(a-b) = \cancel{2(a+b)(a+b)} - \cancel{2(a+b)(a+b)}$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

---

15) $\left| \begin{array}{l} (a+b)y - 4x = (a-b)^2 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{a+b} = b - 1 \end{array} \right| \cdot (a+b)a$

$\left| \begin{array}{ll} (a+b)y - 4x & = (a-b)^2 \\ (a+b)x - ay & = (b-1)(a+b)a \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(a+b) \\ \cdot 4 \end{array}$

$\left| \begin{array}{l} (a+b)(a+b)y - 4x(a+b) = (a-b)^2(a+b) \\ -4ay \qquad + 4x(a+b) = 4(b-1)(a+b)a \end{array} \right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$

$$(a+b)(a+b)y + 4ay = 4(b-1)(a+b)a$$

$$y(a+b)(a+b) + 4ay = 4a(b-1)(a+b)$$
$$y(a^2+2ba+b^2) + 4ay = 4a(ba+b^2-a-b)$$
$$a^2y + 2aby + b^2y + 4ay = 4a^2b + 4ab^2 - 4a^2 - 4ab$$
$$y(a^2+2ab+b^2+4a) = 4a(ab+b^2-a-b)$$

16) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a^2-b^2}+\frac{y}{a+b}=a+b \\ x-\frac{y}{(a+b)^2}+1=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(a+b)(a-b) \\ \cdot\cancel{(a+b)} \end{array}$

$\left|\begin{array}{l} x+y(a-b)=(a+b)(a^2-b^2) \\ x-\frac{y}{(a+b)^2}=-1 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$

$y(a-b)+\frac{y}{(a+b)^2}=(a+b)(a^2-b^2)+1 \quad | \cdot(a+b)(a+b)$

$y(a-b)\cancel{(a+b)}\cancel{(a+b)}+y=(a+b)(a+b)(a+b)(a^2-b^2)+\cancel{(a+b)(a+b)}$

$y(a^2-b^2)(a+b)+y$

$y(a^3+a^2b-b^2a-b^3)+y=(a^2+2ab+b^2)(a+b)(a^2-b^2)+(a^2+2ab+b^2)$

$=(a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3)(a^2-b^2)+(a^2+2ab+b^2)$

$=(a^5+\cancel{a^3b^2}+a^4b\cancel{-a^2b^3}+2a^4b-2a^2b^3+\cancel{2a^3b^2}-2ab^4+\cancel{a^3b^2}-\cancel{ab^4}$
$+\cancel{a^2b^3}-b^5)$

$=(a^5+3a^4b-2a^2b^3+2a^3b^2-3ab^4-b^5)$

$(a^3+a^2+2b \quad b^3)(a^2+a^2b+ \quad b^2)$

$a^5+a^5b(a^2-b^2)$

$y(a-b)+\frac{y}{(a+b)(a+b)}=(a+b\cancel{)(a+b)(a-b)}+1$

$y(a-b)+\frac{y}{(a+b)(a+b)}=(a^3-ab^2+a^2b-b^3)+1$

$y(a-b)(a^2+2ab+b^2)+y=(a^3-ab^2+a^2b-b^3)(\cancel{a+b}\,a^2+2ab+b^2)+(a^2+2ab+b^2)$

$y(a^3+\cancel{2a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-\cancel{2ab^2}-b^3)+y=(a^5+2a^3b+\cancel{a^3b^2}-\cancel{a^3b^2}-2a^2b^3-\cancel{ab^4}+a^4b+2a^3b^2$

$+\cancel{a^2b^3}-\cancel{a^2b^3}+2ab^4+b^5)+(a^2+2ab+b^2)$

$y(a^3+a^2b-ab^2-b^3)+y=(a^5+2a^3b-2a^2b^3+a^4b+2a^3b^2+ab^4+b^5+a^2+2ab+b^2)$

Übungsaufgaben (Positionssysteme)

1)
$$\begin{array}{r} 210_{(3)} \\ +\ 122_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 2101_{(3)} \\ -\ 211_{(3)} \\ \hline \end{array}$$

3) $1001_{(3)} : 11_{(3)} =$

4) Schreibe die grösste fünfstellige Zahl im Siebnersystem!

5) Übersetze 1000 ins

a) Dreiersystem

b) Fünfersystem

c) Sechsersystem

d) Siebnersystem

e) Achtersystem

f) Neunersystem

Ebenso die Zahl 5083.

6) Übersetze ins Zehnersystem!

$20012_{(3)} =$

$4444444_{(5)} =$

$901_{(11)} =$

$1053_{(6)} =$

7) Übersetze vom Vierer- ins Zweiersystem!

a) $303_{(4)}$

b) $2332_{(4)}$

Zwei Lösungsmöglichkeiten! (beide ausführen!)

8) Übersetze vom Dreier- ins Siebnersystem!

a) $210_{(3)}$

b) $2222_{(3)}$

beide Lösungsmöglichkeiten ausführen!

9) $206_{(7)} \cdot 453_{(7)}$

10) $4310_{(5)} \cdot 24321_{(5)}$

11)
$$\begin{array}{r} 61235_{(7)} \\ -\ 6666_{(7)} \\ \hline \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{r} 23587_{(9)} \\ +\ 71468_{(9)} \\ \hline \end{array}$$

13) $67_{(9)} \cdot 184_{(9)}$

14) $46787_{(9)} : 8_{(9)} =$

15) $63214_{(7)} : 4_{(7)} =$

16)
$$\begin{array}{r} 1243134_{(5)} \\ 3110444_{(5)} \\ 324012_{(5)} \\ 141223_{(5)} \\ 24411_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

17) $513204_{(6)} : 2154_{(6)}$

18) $46302_{(7)} \cdot 666_{(7)}$

19)
$$\begin{array}{r} 1244021_{(5)} \\ -\ 440242_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

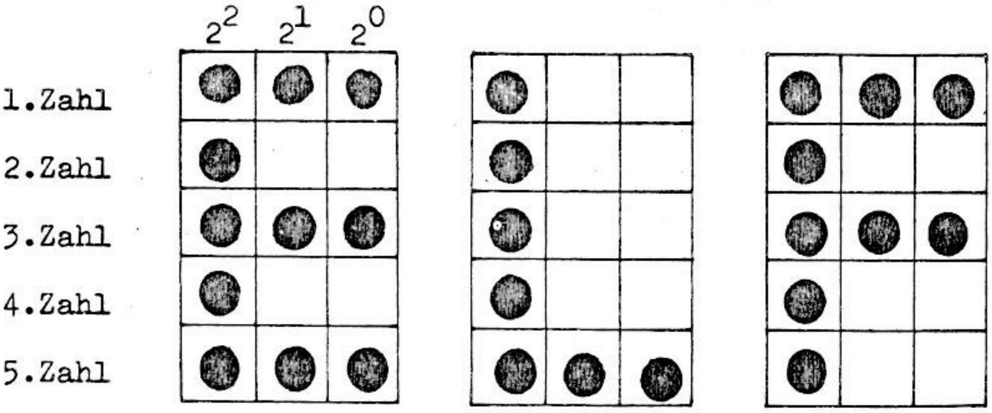
20) $8888_{(9)} \cdot 8888_{(9)}$

Ein Nachrichtensatellit kann aus technischen Gründen nur zwei Impulse (Strom ein/Strom aus) übermitteln. Seine Nachrichten erreichen uns deshalb im Zweiersystem.

Ein Satellit übermittelt folgende Nachricht im Zweiersystem:

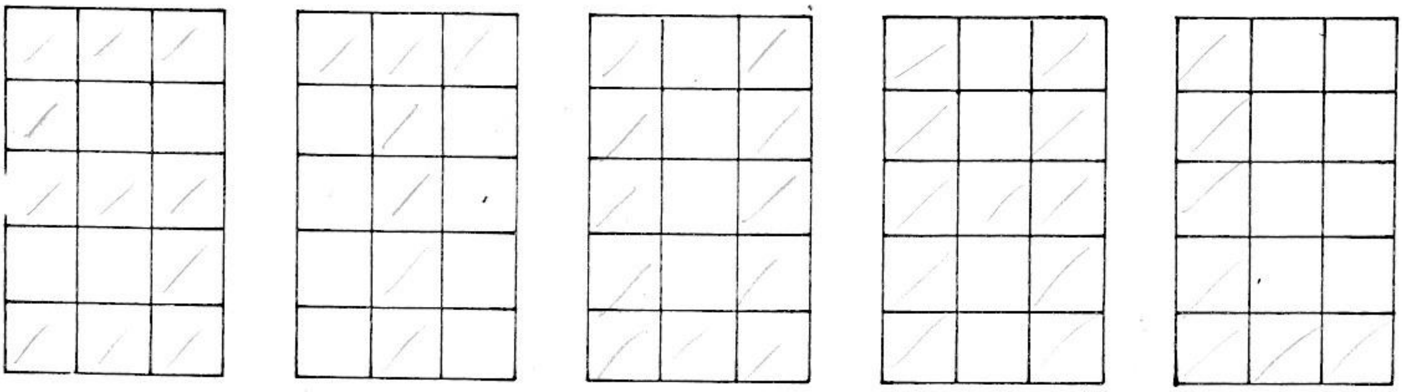
111 - 100 - 111 - 100 - 111
100 - 100 - 100 - 100 - 111
111 - 100 - 111 - 100 - 100

Jede Ziffer im Zweiersystem entspricht einem Bildpunkt im Häuschenraster.

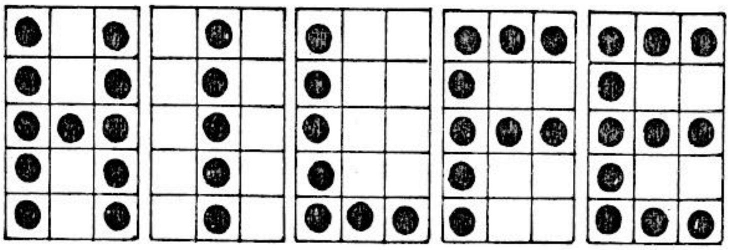


72) Entziffre folgende Mitteilung:

111 - 100 - 111 - 001 - 111
111 - 010 - 010 - 010 - 010
101 - 101 - 101 - 101 - 111
101 - 101 - 111 - 101 - 101
100 - 100 - 100 - 100 - 111



73) Kodiere folgende Nachricht:



101 - 101 - 111 - 101 - 101
010 - 010 - 010 - 010 - 010
100 - 100 - 100 - 100 - 111
111 - 100 - 111 - 100 - 100
111 - 100 - 111 - 100 - 111

Um im unten stehenden Labyrinth (Irrgarten) vom Eingang E zum Ausgang A zu gelangen, muss man sich an gewissen Stellen entscheiden, ob man rechts oder links abbiegen will. Diese Entscheidung lässt sich im Zweiersystem darstellen, wobei wir festlegen:

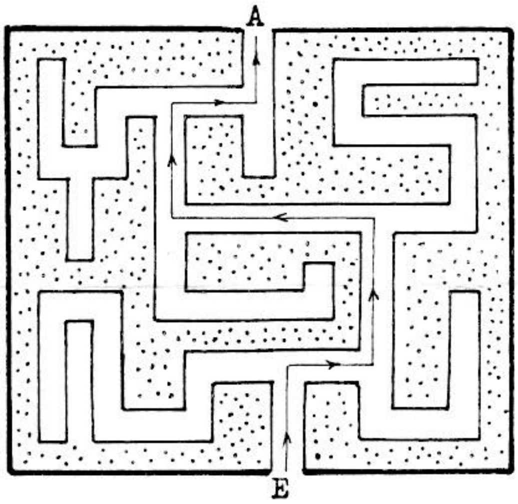
abbiegen nach rechts: 0   abbiegen nach links: 1

Die Reihenfolge der Ziffern von links nach rechts entspricht der Reihenfolge der Entscheidungen:

Erste Stelle (links) : Erste Entscheidung
Zweite Stelle (von links ausgehend) : Zweite Entscheidung
usw.

Die Verschlüsselung (Code) 011 z.B. bedeutet also folgenden Wegbefehl:

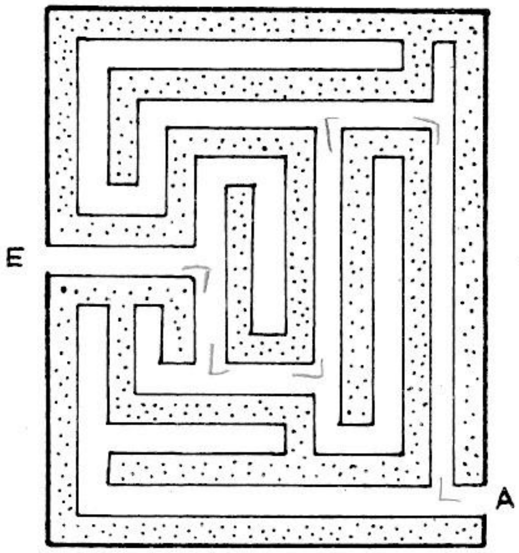
Erste Entscheidung: nach rechts
Zweite Entscheidung: nach links
Dritte Entscheidung: nach links

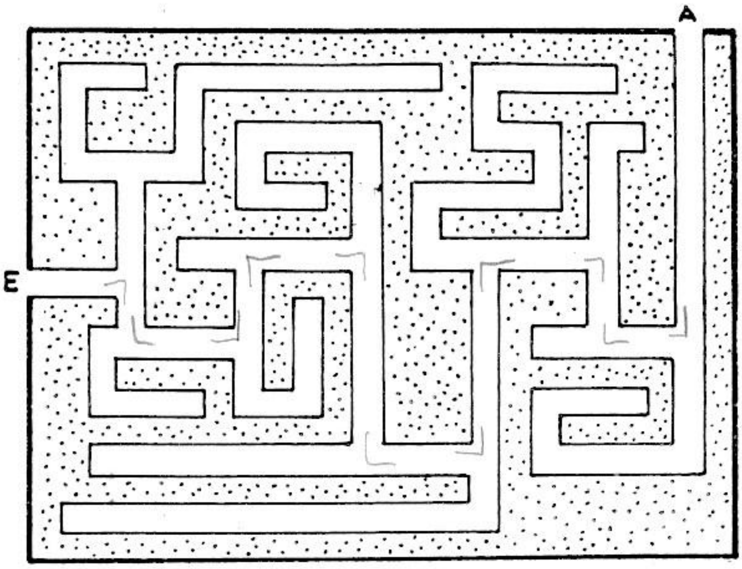


Der Weg heisst: 011001

71) Wie heissen die Wegkodierungen für die folgenden Irrgärten:

rechts: 0   links: 1   rechts: 0   links: 1





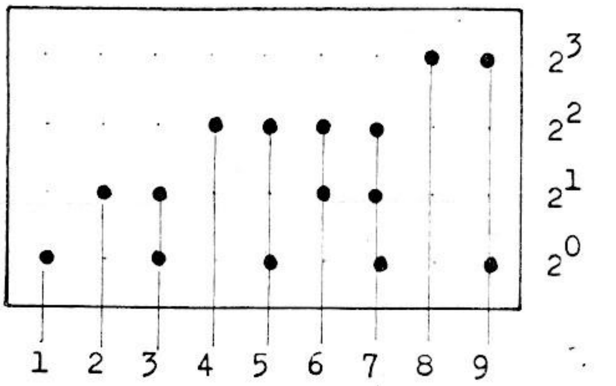
..011001....   ...00110011001

74) Ein Mäusepaar hat 8 Junge (1.Generation). Je zwei Jungtiere haben wieder 8 Junge usw. Wieviele Mäuse werden in der 8.Generation geboren? Berechne diese Zahl im Zweier- und im Zehnersystem.

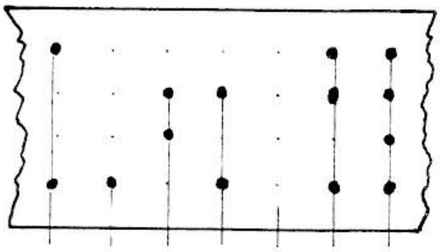
1) 8
2) 2·8
3)
4)
5)
6)
7)
8)

$2+8+(2\cdot 8)+(2\cdot 8+2\cdot 8)+(2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8)+(2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8)+(2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8)$
$+(2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8)+(2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8)+(2\cdot 8+2\cdot 8+2\cdot 8$
$+2\cdot 8+2 8+2 8+2\cdot 8+2\cdot 8)=$

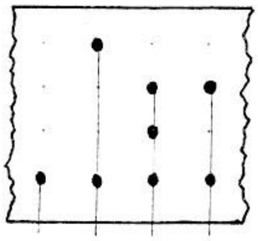
Ein Computer liest Zahlen von einem Lochstreifen im Zweiersystem.



75) Lies folgende Zahlen im Zehnersystem ab:

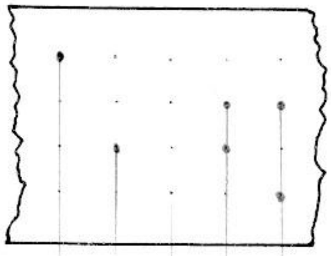


9 1 6 5 0 13 15 ....

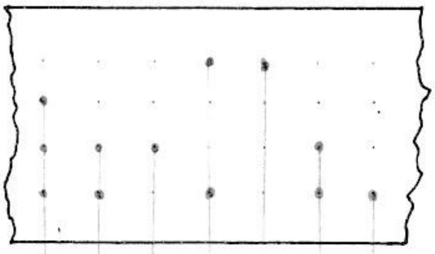


1 9 7 5 ....

76) Uebersetze für den Lochstreifen:



8 2 0 6 5



7 3 2 9 8 3 1

1. Schreibe in Ziffern ohne Potenzen:

Acht Trillionen zweihundert Billionen:

8'000'200'000'000'000'000 ✓

2. Schreibe in Worten: 1'280'346'000'000

eine Billion, 280 Milliarden, 346 Millionen ✓

3. $70'000'000'000'000'000'000 = 7 \cdot 10^x$ $x = 19$ ✓

4. Kleinste dreistellige Zahl: 100 ✓

5. grösste sechstellige Zahl: 999'999 ✓

Positionssysteme

$123_{(4)} = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$ gelesen 1,2,3 im Vierersystem

1)

Zehnersystem	Sechszehner	Vierer	Einer	Vierersystem
18	1	0	2	
21	1	1	1	
38	2	2	0	
20	1	1	0	
17	1	0	1	
32	2	0	0	

2) Welchen Stellenwert hat die Ziffer 3 in der Zahl $3102_{(4)}$?

192

3) Wieviele Einer umfasst die fünfte Stelle im Vierersystem? 767

768

4) Übersetze ins Zehnersystem: $20000_{(4)}$ 256 512

911 $3 \cdot 256$ 56 3 1

143 $2 \cdot 64$

15 $0 \cdot 16$

$3 \cdot 4$

$3 \cdot 1$

417

417 : 4 = 104 R1 ⇒ 1 Einer
d.h. 4 hat 104 × Platz in 417

104 : 4 = 26 R0 ⇒ 0 Vierer
d.h. 16 hat 26 × Platz in ~~###~~ 417

26 : 4 = 6 R2 ⇒ 2 Sechszehner
d.h. 64 hat 6 × Platz in 417

6 : 4 = 1 R2 ⇒ 2 Vierundsechziger
d.h. 456 hat 1 × Platz in 417

1 : 4 = 0 R1 ⇒ 1 Zweihundertsechsundfünfziger

3486

3486 : 4 =	871	R2	2	
871. : 4 =	217	R3	3	
217 : 4 =	54.	R1	1	⇒ Zahl. $312132_{(4)}$
54 : 4 =	13	R2	2	
13 : 4 =	3	R1	1	
3 : 4 =		R3	3	

Ins 4-er-System: 116, 200, 751, 1315, 513, 4096, 13'489

116 ~~116~~ | 0 1 3 1 ⇒ $\underline{\underline{1310_{(4)}}}$

200 | 0 2 0 3 ⇒ $\underline{\underline{3020_{(4)}}}$

751 | 3 3 2 3 2 ⇒ $\underline{\underline{23233_{(4)}}}$

1315 | 3 0 2 0 1 1 ⇒ $\underline{\underline{110203_{(4)}}}$

513 | 1 0 0 0 2 ⇒ $\underline{\underline{20001_{(4)}}}$

4096 | 0 0 0 0 0 0 1 ⇒ $\underline{\underline{1000000_{(4)}}}$

13 489 | 1 0 3 2 0 1 3 ⇒ $\underline{\underline{3102301_{(4)}}}$

Übersetzung ins 10-er-System

$$23103_{(4)} = 2\cdot 4^4 + 3\cdot 4^3 + 1\cdot 4^2 + 0\cdot 4^1 + 3\cdot 4^0$$
$$= 2\cdot 256 + 3\cdot 64 + 1\cdot 16 + 0\cdot 4 + 3\cdot 1$$
$$= 512 + 192 + 16 + 3$$
$$= \underline{\underline{723}}$$

1) ins 10-er-System:

$1323_{(4)} = 64+48+8+3 = \underline{\underline{123}}$

$3001_{(4)} = \underline{\underline{193}}$

$23001_{(4)} = \cancel{512}\ \underline{\underline{705}}$

$33333_{(4)} = \underline{\underline{1023}}$

$100001_{(4)} = \underline{\underline{1025}}$

$2310123_{(4)} = \underline{\underline{11'547}}$

2) Wie heissen die ersten 24 Zahlen im Viersystem

Sechszehner Vierer

$1_{(4)}$	$33_{(4)}$
$2_{(4)}$	$100_{(4)}$
$3_{(4)}$	$101_{(4)}$
$10_{(4)}$	$102_{(4)}$
$11_{(4)}$	$103_{(4)}$
$12_{(4)}$	$110_{(4)}$
$13_{(4)}$	$111_{(4)}$
$20_{(4)}$	$112_{(4)}$
$21_{(4)}$	$113_{(4)}$
$22_{(4)}$	$120_{(4)}$
$23_{(4)}$	
$30_{(4)}$	
$31_{(4)}$	
$32_{(4)}$	

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

1) $1023_{(4)} + 2310_{(4)}$ = ~~113~~ $3333_{(4)}$ ✓

2) $33202_{(4)} + 13322_{(4)} = 113130_{(4)}$ ✓

3) $33333_{(4)} + 33332_{(4)} = 133331_{(4)}$ ✓

4) $3213_{(4)} - 2102_{(4)} = 1111_{(4)}$

5) $22301_{(4)} - 3322_{(4)} = 12313_{(4)}$ ✓

6) $100000_{(4)} - 33333_{(4)} = 00001_{(4)}$ ✓

7) $11_{(4)} \cdot 33_{(4)}$

33
33
$1023_{(4)}$ ✓

8) $12_{(4)} \cdot 332_{(4)}$

1330
3320
$11310_{(4)}$ ✓

9) $20_{(4)} \cdot 103_{(4)}$

~~$320_{(4)}$~~
2120

10) $321_{(4)} \cdot 21_{(4)}$

21
1020
12300
$20001_{(4)}$ ✓

11) $101_{(4)} \cdot 101_{(4)}$

101
101
$10201_{(4)}$ ✓

12) $333_{(4)} \cdot 223_{(4)}$

2222
1221
1221
~~$202131_{(4)}$~~
222111

13) $230010_{(4)} : 2_{(4)} = 112002_{(4)}$ ✓

~~10~~
~~20~~
03
10
0010

14) $2103210_{(4)} : 3_{(4)} = 301030_{(4)}$ ✓

003
021
00

2F

15) Fülle folgende Tabelle:

x	$121_{(4)}$	$2300_{(4)}$	$21321_{(4)}$	$100123_{(4)}$
$10_{(4)}$	$1210_{(4)}$	$23000_{(4)}$	$213210_{(4)}$	$1001230_{(4)}$
$100_{(4)}$	$12100_{(4)}$	$230000_{(4)}$	$2132100_{(4)}$	$10012300_{(4)}$
$1000_{(4)}$	$121000_{(4)}$	$2300000_{(4)}$	$21321000_{(4)}$	$100123000_{(4)}$

16) ebenso wie 15

:	$10_{(4)}$	$100_{(4)}$	$1000_{(4)}$
$3210000_{(4)}$	$321000_{(4)}$	$32100_{(4)}$	$3210_{(4)}$
$100010000_{(4)}$	$10001000_{(4)}$	$1000100_{(4)}$	$100010_{(4)}$
$30302010000_{(4)}$	$3030201000_{(4)}$	$303020100_{(4)}$	$30302010_{(4)}$

✓

17) Schreibe zu jeder Grundoperation eine Aufgabe auf, die im Vierer- und Zehnersystem gleich aussieht.

$$\begin{array}{r} 222 \\ -\,111 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 222 \\ +\,111 \\ \hline 333 \end{array} \qquad 300 : 100 = 3$$

$\cancel{312_{(4)} \cdot 131_{(4)}}$

$$\begin{array}{r} 111_{(4)} \cdot 111_{(4)} \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array}$$

18) 4 Fam.en zu je 4 Pers. sind während 16 Tg.en in den Ferien. Pro Tg. muss pro Person mit 64 Fr. Ausgaben gerechnet werden. Berechne die Gesamtkosten im 4-er-System.

$10_{(4)} \cdot 10_{(4)} \cdot 100_{(4)} \cdot 1000_{(4)} = 10000000_{(4)}$

Gesamtkosten: $\underline{10000000_{(4)}}$ Fr.

Das Zweiersystem (Binarsystem, Dualsystem)

Alle Computer rechnen mit dem Zweiersystem.

Das Zweiersystem ist auf Zweierpotenzen aufgebaut.

$1011_{(2)}$

Übersetzen von 10er ins Zweiersystem

$73 : 2 = 36$ R1

$36 : 2 = 18$ R0 $\Rightarrow$ $\underline{1001001_{(2)}}$ (von unten nach oben gelesen)

$18 : 2 = 9$ R0

$9 : 2 = 4$ R1

$4 : 2 = 2$ R0

$2 : 2 = 1$ R0

$1 : 2 = 0$ R1

Übersetzen vom Zweier- ins Zehnersystem

$$\begin{aligned} 10010111_{(2)} &= 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 128 + 0 + 0 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 \\ &= \underline{\underline{151}} \end{aligned}$$

1) Übersetze ins Zweiersystem: 35, 512, 93, 973, 1357

2) Übersetze ins Zehnersystem: $101_{(2)}$, $111111_{(2)}$, $100000001_{(2)}$, $11110101111_{(2)}$

3) Schreibe die ersten 20 Zahlen im 2-er System

1) 35 | 1 1 0 0 0 1 — $\underline{\underline{100011_{(2)}}}$ ✓

2) 512 | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 — $\underline{\underline{1000000000_{(2)}}}$ ✓

3) 93 | 1 0 1 1 1 0 1 — $\underline{\underline{1011101_{(2)}}}$ ✓

973 | 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 — $\underline{\underline{1111001101_{(2)}}}$ ✓

1357 | 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 — $\underline{\underline{10101001101_{(2)}}}$ ✓

2) $101_{(2)} = \underline{\underline{5}}$ ✓

$111111_{(2)} = 1+2+4+8+16+32 = \underline{\underline{63}}$ ✓

$100000001_{(2)} = \underline{\underline{257}}$ ✓

$11110101111_{(2)} = 1+2+4+8+32+128+256+512+1024 = \underline{\underline{1967}}$ ✓

3) 1, 10, 11, 100, 101, 111, 1000, 1001, 1011, 1111, 10000, 10001, 10011, 10111, 11111

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10100, 11000

4)

$$\begin{array}{r} 100_{(2)} \\ 111_{(2)} \\ \hline \underline{\underline{1011_{(2)}}} \end{array} ✓ \qquad \begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ 110011_{(2)} \\ \hline \cancel{1001010_{(2)}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111111_{(2)} \\ 111_{(2)} \\ \hline \underline{\underline{10000110_{(2)}}} \end{array} ✓$$

$$\begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ 110011_{(2)} \\ \hline \underline{\underline{1101010_{(2)}}} \end{array} ✓$$

$$\begin{array}{r} 11111_{(2)} \\ 1001_{(2)} \\ 1100_{(2)} \\ \hline \underline{\underline{110100_{(2)}}} \end{array} ✓ \qquad \begin{array}{r} 11111_{(2)} \\ 11111_{(2)} \\ 1111_{(2)} \\ \hline \cancel{110101_{(2)}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010011_{(2)} \\ 111011_{(2)} \\ 100111_{(2)} \\ 11111_{(2)} \\ \hline \cancel{11010000_{(2)}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111_{(2)} \\ 11111_{(2)} \\ 1111_{(2)} \\ \hline \underline{\underline{1001101_{(2)}}} \end{array} ✓ \qquad \begin{array}{r} 1010011_{(2)} \\ 111011_{(2)} \\ 100111_{(2)} \\ 11111_{(2)} \\ \hline \underline{\underline{11010100_{(2)}}} \end{array} ✓$$

5) $111_{(2)} - 11_{(2)} = \underline{\underline{100_{(2)}}}$ ✓ $1111_{(2)} - 100_{(2)} = \underline{\underline{1011_{(2)}}}$ ✓ $1000000_{(2)} - 111111_{(2)} = \underline{\underline{000001_{(2)}}}$ ✓

---

6) $11_{(2)} \cdot 10_{(2)}$

```
  10
 10
 110(2) ✓
```

$111_{(2)} \cdot 111_{(2)}$

```
  111
 111
111
110001(2) ✓
```

~~10001 · 1011~~

```
     1011
 10110
 10110101 1
```

$10001_{(2)} \cdot 1011_{(2)}$

```
    1011
   0000
  0000
 0000
1011
10111011(2) ✓
```

---

7) $10100_{(2)} : 10_{(2)} = \underline{\underline{1010_{(2)}}}$ ✓
10

$11100_{(2)} : 11_{(2)} = \underline{\underline{10011_{(2)}}}$ ✓
100
11

2-er System	3-er System		4-er System	5-er S.	6-er S.	7-er S.	8-er S.
1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2
11	10	10	3	3	3	3	3
100	11	11	10	4	4	4	4
101	12	20	11	10	5	5	5
110	20	21	12	11	10	6	6
111	21	22	13	12	11	10	7
1000	22	100	20	13	12	11	10
1001	100	101	21	14	13	12	11
1010	101	102	22	20	14	13	12
1011	102	110	23	21	15	14	13
1100	110	111	30	22	20	15	14
1101	111	112	31	23	21	16	15
1110	112	120	32	24	22	20	16
1111	120	121	33	30	23	21	17
10000	121	122	100	31	24	22	20
10001	122	200	101	32	25	23	21
10010	200	201	102	33	30	24	22
10011	201	202	103	34	31	25	23
10100	202	210	110	40	32	26	24
10101	210	211	111	41	33	30	25
10110	211	212	112	42	34	31	26
10111	212	220	113	43	35	32	27
11000	220	221	120	44	40	33	30
11001 ✓	221	222 ✓	121 ✓	100 ✓	41 ✓	34 ✓	31 ✓

9-er S.

1	8	16	24
2	10	17	25
3	11	18	26
4	12	20	27 ✓
5	13	21	
6	14	22	
7	15	23	

10-er S.

1	8	15	22
2	9	16	23
3	10	17	24
4	11	18	25 ✓
5	12	19	
6	13	20	
7	14	21	

11-er S.

1	8	14	20
2	9	15	21
3	X	16	22
4	10	17	23 ✓
5	11	18	
6	12	19	
7	13	1Y	