Michael Schulz

RA Rechnen
Algebra

6a MNG Contos

Michael Schulz
Algebra 6a MNG I

mit Contos

Algebra Michael Schulz 6a MNG

81/90 f) $$\frac{x^2 \pm x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$$

$$(x^2+x+1)(a^2+3b^2) = (3a^2+b^2)(x^2-x+1)$$

$$a^2x^2+3b^2x^2+a^2x+3b^2x+a^2+3b^2 = 3a^2x^2-3a^2x+3a^2+x^2b^2-b^2x+b^2$$

$$-2a^2x^2+2b^2x^2+2a^2x+4b^2x+a^2+2b^2=0$$

$$2x(b^2-a^2)+2x(a^2+2b^2)+a^2+2b^2=0$$

$$2x(b-a)(b+a)+2x(a-b)(a-$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$$

$$(a^2+3b^2)(x^2+x+1) = (3a^2+b^2)(x^2-x+1)$$

$$x^2(-2a^2+2b^2)+x(4a^2+4b^2)-2a^2+2b^2=0 \quad |:2$$

$$x^2(-a^2+b^2)+x(2a^2+2b^2)-a^2+b^2=0$$

$$x^2(-a^2+b^2)+2x(a^2+b^2)-a^2+b^2=0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2(a^2+b^2) \pm \sqrt{4(a^2+b^2)^2-4(-a^2+b^2)^2}}{2(-a^2+b^2)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(a^2+b^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)^2}}{-a^2+b^2} = \frac{-(a^2+b^2) \pm 2ab}{-a^2+b^2}$$

89 f g h

$$x_1 = \frac{-a^2+2ab-b^2}{-a^2+b^2} = \frac{-(a^2-2ab+b^2)}{-a^2+b^2} = \frac{(a\mp b)^2}{\cancel{(a+b)^2}} = \frac{\cancel{a-b}}{a+b}$$

$$x_2 = \frac{-(a^2+b^2)-2ab}{\cancel{-a^2+b^2}} = \frac{-(a^2+\cancel{2ab}+b^2)}{-(a^2-2ab+b^2)} = -$$

$$x_1 = \frac{-a^2+2ab-b^2}{-a^2+b^2} \quad |\cdot -1$$

$$\underline{\underline{x_1}} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \underline{\underline{\frac{a-b}{a+b}}}$$

$$x_2 = \frac{-a^2-2ab-b^2}{-a^2+b^2} \quad |\cdot -1$$

$$\underline{\underline{x_2}} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\cancel{(a+b)}(a+b)}{\cancel{(a+b)}(a-b)} = \underline{\underline{\frac{a+b}{a-b}}}$$


Einheit : 2·5mm

Algebra   Michael Schulz 6a MNG

81/90 f) $\frac{x^2 \pm x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3a^2 + b^2}{a^2 + 3b^2}$

$(x^2+x+1)(a^2+3b^2) = (3a^2+b^2)(x^2-x+1)$

$a^2x^2 + 3b^2x^2 + a^2x + 3b^2x + a^2 + 3b^2 = 3a^2x^2 - 3a^2x + 3a^2 + x^2b^2 - b^2x + b^2$

$-2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2x + 4b^2x + a^2 + 2b^2 = 0$

$2x(b^2-a^2) + 2x(a^2+2b^2) + a^2 + 2b^2 = 0$

$2x(b-a)(b+a) + 2x(a-b)(a-$

$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$

$(a^2+3b^2)(x^2+x+1) = (3a^2+b^2)(x^2-x+1)$

$x^2(-2a^2+2b^2) + x(4a^2+4b^2) - 2a^2 + 2b^2 = 0 \quad |:2$

$x^2(-a^2+b^2) + x(2a^2+2b^2) - a^2 + b^2 = 0$

$x^2(-a^2+b^2) + 2x(a^2+b^2) - a^2 + b^2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2(a^2+b^2) \pm \sqrt{4(a^2+b^2)^2 - 4(-a^2+b^2)^2}}{2(-a^2+b^2)}$

$x_{1/2} = \frac{-(a^2+b^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - (a^2+b^2)^2}}{-a^2+b^2} = \frac{-(a^2+b^2) \pm 2ab}{-a^2+b^2}$

89 f g h

$x_1 = \frac{-a^2+2ab-b^2}{-a^2+b^2} = \frac{-(a^2-2ab+b^2)}{-a^2+b^2} = \frac{(a-b)^2}{\cancel{(a+b)^2}} = \frac{\cancel{a-b}}{a+b}$

$x_2 = \frac{-(a^2+b^2)-2ab}{\cancel{-a^2+b^2}} = \frac{-(a^2+2ab+b^2)}{-(a^2-2ab+b^2)} = -$

$x_1 = \frac{-a^2+2ab-b^2}{-a^2+b^2} \quad | \cdot -1$

$\underline{\underline{x_1}} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \underline{\underline{\frac{a-b}{a+b}}}$

$x_2 = \frac{-a^2-2ab-b^2}{-a^2+b^2} \quad | \cdot -1$

$\underline{\underline{x_2}} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\cancel{(a+b)}(a+b)}{\cancel{(a+b)}(a-b)} = \underline{\underline{\frac{a+b}{a-b}}}$

81/90g)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}=0 \quad | \cdot x(x+a)(x+2a) \qquad x \neq 0, -a, -2a$$

$$(x+a)(x+2a)+x(x+2a)+x(x+a)=0$$
$$x^2+2ax+ax+2a^2+x^2+2ax+x^2+ax=0$$

$$x^2(1+1+1)+x(2a+a+2a+a)+2a^2=0$$

$$3x^2+6ax+2a^2=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-6a\pm\sqrt{36a^2-24a^2}}{6}=\frac{\overset{3}{\cancel{-6a}}\pm 2\sqrt{9a^2-6a^2}}{\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{-3a\pm\sqrt{3}a}{3}=-a\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

81/90h) $\dfrac{a(x-b)^3-b(x-a)^3}{(a-x)^3-(b-x)^3}=x \quad |\cdot[(a-x)^3-(b-x)^3]$

$$a(x-b)^3-b(x-a)^3 = x[(a-x)^3-(b-x)^3]$$

$$(ax^3-3ax^2b+3axb^2-ab^3)-(bx^3-3bx^2a+3bxa^2-ba^3)=$$

$$ax^3-\cancel{3ax^2b}+3axb^2-ab^3-bx^3\cancel{+3bx^2a}-3bxa^2+ba^3=x[a^3-3a^2x+3ax^2-x^3-b^3$$
$$+3b^2x-3bx^2a-3bxa^2+ba^3]$$

$$x^3(a-b)+x(3ab^2-3a^2b)-ab^3+a^3b$$

$$x^3(a-b)-3abx(a-b)+ab(a^2-b^2)=x[3x^2(a-b)-3x(a^2-b^2)+a^3-b^3] \quad |:(a-b)$$

$$x^3-3abx+ab(a+b)=x[3x^2-3x(a+b)+a^2+ab+b^2]$$

$$x^3-3abx+(a^2b+ab^2)=3x^3-3x^2(a+b)+a^2x+abx+b^2x$$

$$2x^3-3x^2(a+b)+x(a^2+4ab+b^2)-a^2b-ab^2=0$$

Ist $x=a$ eine Lösung?

$$2a^3-a^2-3a^2b+a^3+4a^2b+ab^2-a^2b-ab^2 \quad \Rightarrow \quad x_1=a$$

Division durch $(x-a)$ ⇒ nur noch quadratische Gleichung

$$(2x^3-3x^2(a+b)+x(a^2+4ab+b^2)-a^2b-ab^2):(x-a)=\underline{\underline{2x^2-x(a+3b)+(ab+b^2)}}$$
$$-2x^3+2ax^2$$
$$x^2(-a-3b)+x(a^2+4ab+b^2)$$
$$x^2(a+3b)+x(a^2-3ab)$$
$$x(ab+b^2)-a^2b-ab^2$$
$$-x(ab+b^2)+a^2b+ab^2$$

Gleichung:

$$(x-a)[2x^2-x(a+3b)+b(a+b)]=0$$

$$x_{2/3}=\frac{(a+3b)\pm\sqrt{(a+3b)^2-8b(a+b)}}{4}=\frac{(a+3b)\pm\sqrt{a^2+6ab+9b^2-8ab-8b^2}}{4}$$

$$=\frac{a+3b\pm(a-b)}{4} \begin{cases} \frac{a+b}{2} \\ b \end{cases}$$

90 i) $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a+b-2x)^2}=a-b$

$\frac{a^3-3a^2x+3ax^3\cancel{-x^3}\cancel{+x^3}-3bx^2+3b^2x-b^3}{(a+b-2x)^2}=a-b$

$\frac{3x^2(a-b)-3x(a^2-b^2)+a^3-b^3}{(a+b-2x)^2}=a-b \quad |:(a-b)$

$\frac{3x^2-3x(a+b)+a^2+ab+b^2}{(a+b-2x)^2}=1 \quad |\cdot(a+b-2x)^2$

$3x^2-3x(a+b)+a^2+ab+b^2=(a+b-2x)^2$ $\quad (a+b-2x)(a+b-2x)=a^2+ab-\cancel{2ax}+ab+b^2-2bx$
$3x^2-3x(a+b)+a^2+ab+b^2=a^2+2ab-2ax-2bx+2x^2+b^2$ $\quad \cancel{-2ax}-2bx+2x^2$

$a^3-3a^2x+3ax^2-3bx^2+3b^2x-b^3=(a-b)(a+b-2x)^2$ $\quad (a+b-2x)(a+b-2x)$
$a^2+ab-2ax+ab+b^2\cancel{+4x^2}-2bx$
$3x^2(a-b)-3x(a+b)+a^3-b^3$ $\quad =\cancel{a^2+ab-2ax-ab-b^2+2bx}$ $-2ax-2bx+4x^2$
$(a-b)(a^2+2ab-4ax-4bx+4x^2+b^2)$

$3x^2(a-b)-3x(a+b)+\cancel{a^3}-\cancel{b^3}$ $\quad =\cancel{a^3}+2a^2b-4a^2x-\cancel{4abx}+4ax^2+ab^2-a^2b-2ab^2$
$\cancel{+4abx}+4b^2x-4bx^2-\cancel{b^3}$

$\cancel{3ax^2}-\cancel{3bx^2}-3ax-3bx$

$x(-3a-3b)-a^2b$ $\quad x_1=b \quad x_2=a$

b) $x_{1/2} = a, b$

81/90 l) $\frac{(a-x)^3-(b-x)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$

$$(a^2+b^2)[(a-x)^3-(b-x)^3]=(a^3-b^3)[(a-x)^2+(x-b)^2]$$

$$(a^2+b^2)[(a-x)^2+(a-x)(b-x)+(b-x)^2]=(a^2+ab+b^2)[(a-x)^2+(b-x)^2]$$

$$(a^2+b^2)[(a^2-2ax+x^2)+(ab-ax-bx+x^2)+(b^2-2bx+x^2)]=(a^2+ab+b^2)[(a^2-2ax+x^2)+(b^2-2bx+x^2)]$$

$$(a^2+b^2)(a^2-2ax+x^2+ab-ax-bx+x^2+b^2-2bx+x^2)=(a^2+ab+b^2)(a^2-2ax+x^2+b^2-2bx+x^2)$$

$$(a^2+b^2)[(a^2+ab+b^2)+(3x^2-3ax-3bx)]=(a^2+ab+b^2)[(a^2+b^2)-2ax-2bx+2x^2]$$

$$\underbrace{(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)}+3(a^2+b^2)(x^2-ax-bx)=\underbrace{(a^2+ab+b^2)(a^2+b^2)}+2(a^2+ab+b^2)(x^2-ax-bx)$$

$$3(a^2+b^2)(x^2-ax-bx)-2(a^2+ab+b^2)(x^2-ax-bx)=0$$

$$(x^2-ax-bx)[3a^2+3b^2-2a^2-2ab-2b^2]=0$$

$$(x^2-ax-bx)[a^2+b^2-2ab]=0$$

$$x^2-ax-bx=0$$
$$x^2-x(a+b)=0$$
$$x[x-(a+b)]=0 \qquad \underline{\underline{x_1=0}} \quad \underline{\underline{x_2=a+b}}$$

91/154) $x\cdot\frac{10}{13}x=130$

$\frac{10}{13}x^2=130$

$x^2=169$

$\underline{\underline{x_{1/2}=\pm 13}}$

91/155) $(6\frac{1}{2}+x)(6\frac{1}{2}-x)=40$

$42.25-x^2=40$

$x^2=2.25$

$\underline{\underline{x_{1/2}=\pm 1.5}}$

x = Abweichung der gesuchten Zahl v. $6\frac{1}{2}$

1. Zahl: 8
2. Zahl: 5

91/156) $\frac{2}{3}x^2-50=\frac{3}{5}x^2+85$

157) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^2=468$

158 $3x:4x=3:4$

159) $4x^2+9x^2=208$

92/160 $\quad$ x = Abweichung

$$\sqrt{40+x}+\sqrt{40-x}=12$$

$$40+\cancel{x}+2\sqrt{40+x}\sqrt{40-x}+40\cancel{-x}=144$$

$$80+2\sqrt{(40+x)(40-x)}=144$$

$$2\sqrt{(40+x)(40-x)}=32$$

$$1600-x^2=1024$$

$$x_{1/2}=\pm 24$$

1. Zahl : 64 ||
2. Zahl : 16 ||

92/161

$$4x^2=100$$
$$x^2=25$$
$$\underline{\underline{x_{1/2}=\pm 5}}$$

x = Anzahl Knaben

Jeder erhielt 4x Nüsse

93 a b c

82/93a) $a^2x^2-2a^3x+a^4-b^4=0$

$$\underline{\underline{x_{1/2}}}=\frac{2a^3\pm\sqrt{4a^6-4a^2(a^4-b^4)}}{2a^2}=\frac{2a^3\pm\sqrt{\cancel{4a^6}-\cancel{4a^6}+4a^2b^4}}{2a^2}=\frac{2a^3\pm 2\sqrt{\cancel{a^6}-\cancel{a^6}+a^2b^4}}{2a^2}=\frac{2a^3\pm 2a\sqrt{\cancel{a^4}-\cancel{a^4}+b^4}}{2a^2}$$

$$=\frac{\cancel{2}a^3\pm\cancel{2}ab^2}{\cancel{2}a^2}=\frac{a^3\pm ab^2}{a^2}=\underline{\underline{\frac{a^2\pm b^2}{a}}}\ \checkmark$$

---

b) $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc=0$

$$x_{1/2}=\frac{-a^2b^2-c^2\pm\sqrt{(a^2b^2+c^2)(a^2b^2+c^2)-4a^2b^2c^2}}{2abc}=\frac{-a^2b^2-c^2\pm\sqrt{a^4b^4+\cancel{2a^2b^2c^2}+c^4-\cancel{4}2a^2b^2c^2}}{2abc}=$$

$$\frac{-a^2b^2-c^2\pm\sqrt{(a^4b^4-2a^2b^2c^2+c^4)}}{2abc}=\frac{(-a^2b^2-c^2)\pm(a^2b^2-c^2)}{2abc}$$

$$\underline{\underline{x_1}}=\frac{-\cancel{2}c^2}{\cancel{2}abc}=\frac{-c^{\cancel{2}}}{ab\cancel{c}}=\underline{\underline{\frac{-c}{ab}}}\ \checkmark\qquad \underline{\underline{x_2}}=\frac{-\cancel{2}a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{a}\cancel{b}c}=\underline{\underline{\frac{-ab}{c}}}\ \checkmark$$

---

c) $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$

$$x_{1/2}=\frac{2(a^2+b^2)\pm\sqrt{4(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2}}{2}=\frac{\cancel{2}(a^2+b^2)\pm\cancel{2}\sqrt{(a^4+2a^2b^2+b^4)-(a^4-2a^2b^2+b^4)}}{\cancel{2}}=$$

$$(a^2+b^2)\pm\sqrt{\cancel{a^4}+2a^2b^2\cancel{+b^4}\cancel{-a^4}+2a^2b^2\cancel{-b^4}}=(a^2+b^2)\pm 2ab=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$\underline{\underline{x_1=(a+b)^2}}\ \checkmark\quad \underline{\underline{x_2=(a-b)^2}}\ \checkmark$$

82/94c) $\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} = \frac{(a+b)^2}{ab} \quad | (x+a)(x+b)ab \qquad x \neq -a, -b, 0$

$$a^2b(x+b) + ab^2(x+a) = (a+b)^2(x+a)(x+b)$$

$$a^2bx + a^2b^2 + ab^2x + a^2b^2 = (a^2+2ab+b^2)(x^2+bx+ax+ab)$$

$$\cancel{a^2bx} + \cancel{2a^2b^2} + \cancel{ab^2x} = a^2x^2 + \cancel{a^2bx} + a^3x + a^3b + 2ax^2b + 2ab^2x + 2a^2bx + \cancel{2a^2b^2} + b^2x^2 + b^3x$$
$$+ \cancel{ab^2x} + ab^3$$

$$x^2(a+b)^2 + x(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3) + a^3b + ab^3$$
$$x^2(a+b)^2 + x[(a+b)^3 - a^2b + ab^2] + ab(a^2+b^2)$$
$$(a+b)^3 - ab(a+b)$$

$\cancel{x_{1/2} =}$

$$x^2(a+b)^2 + x(a+b)[(a+b)^2 - ab] + ab(a^2+b^2) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(a+b)[(a+b)^2-ab] \pm \sqrt{(a+b)^2[(a+b)^2-ab]^2 - 4(a+b)^2ab(a^2+b^2)}}{2(a+b)^2}$$

$$\frac{-\cancel{(a+b)}[(a+b)^2-ab] \pm \cancel{(a+b)}\sqrt{[(a+b)^2-ab]^2 - 4ab(a^2+b^2)}}{2(a+b)^{\cancel{2}}}$$

Die Wurzel: $(a^2+ab+b^2)^2 - 4ab(a^2+b^2)$
$[(a^2+b^2)+ab]^2 - 4ab(a^2+b^2) = [(a^2+b^2)-ab]^2$

$$\frac{-[(a+b)^2-ab] \pm [(a^2+b^2)-ab]}{2(a+b)} = \frac{(a^2+b^2+ab) \pm (a^2+b^2-ab)}{2(a+b)}$$

$$\underline{\underline{x_1 = -\frac{ab}{a+b}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}}}$$

92/162

x = Anzahl Eier = 60

92/163

x = Einkaufspreis

Gewinn $\frac{x}{5}$ %

Gewinn: $\frac{x}{100} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2}{500}$

$$\frac{x^2}{500} = 245$$

$$x^2 = 500 \cdot 245$$
$$x_{1/2} = \pm 350$$

Verkaufspreis: <u>595 Fr.</u>

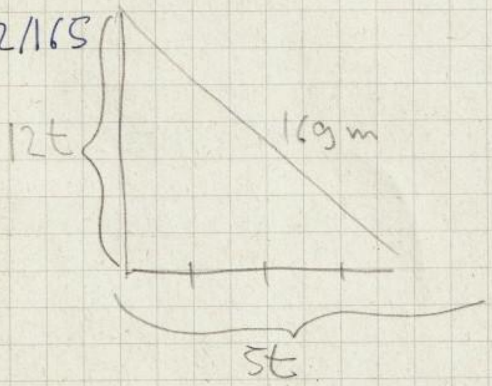
164)

	1. Sorte	2. Sorte	3. Sorte
Anzahl hl	x	$1\frac{1}{3}x$	$\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3}x = \frac{14}{3}x$
Preis pro hl	$2x$	$2\frac{2}{3}x$	$\frac{28}{3}x = 9\frac{1}{3}x$

1. Sorte: 60 Fr./hl
2. Sorte:
3. Sorte:

$$2x^2 + \frac{32}{9}x^2 + \frac{292}{9}x^2 = 176'800 \mid \cdot 9$$
$$18x^2 + 32x^2 + 292x^2 = 9 \cdot 176'800$$
$$\underline{342x^2} = 9 \cdot 176'800$$
$$x = \sqrt{\frac{9 \cdot 176'800}{442}} = 60$$

92/165



$$\sqrt{25t^2 + 144t^2} = 169$$
$$169t^2 = 169^2$$
$$\underline{\underline{t = 13}}$$

196

x = grössere der beiden Zahlen

$$x(x-7) = 260$$

$$x^2 - 7x - 260 = 0$$
$$(x+13)(x-20) = 0$$

$$x_1 = -13$$
$$x_2 = 20$$

1. 20, 13
2. -13, -20

96/197 x = 1. Teil

$$x^2+(38-x)^2=730$$
$$x^2+1444-76x+x^2-730=0$$
$$2x^2+714-76x=0$$
$$x^2-38x+357=0$$
$$\frac{38\pm 4}{2}=$$

96/198 x = gesuchte Zahl

$$x^2-6-54=12-x$$
$$x^2+x-72=0$$
$$\frac{-1\pm 17}{2}=\begin{cases}8\\-9\end{cases}$$

96/199β) $a=30$ x = gröss. Abschnitt

$$30:x=x:(30-x)$$
$$30(30-x)=x^2$$
$$-x^2-30x+900=0$$
$$\frac{+30\pm\sqrt{900+3600}}{2}=\frac{+30\pm 30\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1=-15+15\sqrt{5}\approx 18.54 \qquad 30-(-15+15\sqrt{5})=$$
$$x_2=-15-15\sqrt{5} \qquad 45-15\sqrt{5}\approx 11{,}46$$

200)α) $\frac{a+b}{2}=15$ $a+b=30$ x = 1. Zahl

$$\sqrt{a\cdot b}=9 \quad a\cdot b=81$$
$$x(30-x)=81$$
$$30x-x^2=81$$
$$-x^2+30x-81=0$$
$$x^2-30x+81=0$$
$$\frac{+30\pm 24}{2}=\begin{cases}27\\3\end{cases}$$

297 211-215

200β) $\frac{a+b}{2}=26$ $ab=100$

$$a+b=52$$
$$x(52-x)=100$$
$$52x-x^2-100=0$$
$$x^2-52x+100=0$$
$$\pm 48$$

96/201 x = 1. Summand

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{900-x}=\frac{1}{221}$$
$$221(900-x)+221x=x(900-x)$$
$$221(900-x)+221x-x(900-x)=0$$
$$198'900-\cancel{221x}+\cancel{221x}-900x+x^2=0$$
$$x^2-900x+198'900=0$$
$$\frac{900\pm 120}{2}=\begin{cases}x_1=510\\x_2=390\end{cases}$$

97/2 11) Es verkauft jemand eine Uhr für 144 Fr. und gewinnt dabei so viele Prozente, als die Uhr Franken gekostet hat.

Geg.: Gewinn = x % Gewinn = ~~72%~~ 80 Fr. 80 %

Verkaufspreis = 144

Ankaufspreis = $144 - (144 - x) = x$ ~~Ankaufspreis 72 Fr.~~

$\cancel{144 - x = x}$

$\cancel{144 = 2x}$

$\cancel{x = 72}$

$x + \frac{x^2}{100} = 144$

$x^2 + 100x - 14400 = 0$

$\frac{-100 \pm 260}{2} = \begin{cases} 80 \\ -180 \end{cases}$

$x + \frac{\frac{2x}{5}}{100} = 105.6$ Fr.

$x^2 + 250x - 26400 = 0$

$\frac{-250 \pm 410}{}$

97/2 12) Ankauf: x 105.6 Fr. $- x = \frac{2}{5}x$ ~~Ankauf: 44 Fr.~~ 80

Gewinn: $\frac{2}{5}x$ $528 = 12x$ $x = 44$ ~~Gewinn: 17.6%~~

Verkauf: 105.6 Fr.

---

213 $\cancel{19.2 + \frac{19.2}{x} = x \cdot 2.7}$ $x =$ ~~Anzahl Kaninchen~~ Gewinn

$-2.7x^2 + 19.2 = 0$ $x = 19.2$ Fr. Anschaffungspreis

Verkauf: je 2.7 Fr.

$2.7x = 19.2 + \frac{19.2}{x} \quad | \cdot x$

Anzahl Kaninchen: <u>8</u> ✓

$2.7x^2 - 19.2x - 19.2 = 0$

$\frac{19.2 \pm 24}{5.4} = \begin{cases} \underline{\underline{8}} \\ -0.\overline{8} \ldots \end{cases}$

---

214 $53x = 696 + x^2$ $x =$ Alter

$-x^2 + 53x - 696 = 0$

$\frac{-53 \pm 5}{-2} = \begin{cases} 24 \\ 29 \end{cases}$ ‖ ✓

---

215 $\frac{720}{x+6} = \frac{720}{x} - 10 \quad | x(x+6)$ $x =$ Anzahl

$\cancel{720x} = \cancel{720x} + 4320 - 10x^2 - 60x$

$10x^2 + 60x - 4320 = 0$

$x^2 + 6x - 432 = 0$

$\frac{-6 \pm 42}{2} = \begin{cases} +18 \\ -24 \end{cases}$ ‖ ✓

97/2 12) Ankauf: x

Gewinn: $\frac{2}{5}x$ $x + \frac{\frac{2}{5}x}{100} = 105.6$

Verkauf 105.6 Fr.

$x =$ Prozent Gewinn

98/220) $2000 \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 2645$

$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{2645}{2000} = \frac{529}{400}$

$1+\frac{x}{100} = \pm\frac{23}{100}$

$1+\frac{x}{100} = \pm\left(1+\frac{3}{20}\right)$

$\frac{x}{100} - \frac{3}{20}$

$\underline{\underline{x = 15}}$

98/222)

$x =$ 1. Kapital 1. Zinsfuss: $\frac{3000}{x}$

2. Kapital $= x+500$ Fr. 2. Zinsfuss: $\frac{3000}{x}+\frac{1}{2}$ ~~52.5 Fr.~~

Zinsfuss: $\frac{100 \cdot \cancel{\text{Kapital}}\ \text{Zins}}{\text{Kapital}}$

$\frac{x+500}{100}\left(\frac{3000}{x}+0.5\right) = 52.5$

$(x+500)\left(\frac{3000}{x}+0.5\right) = 5250$

$(x+500)\left(3000+\frac{1}{2}x\right) = 5250x$

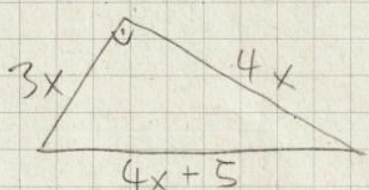
$3000x + \frac{1}{2}x^2 + 1'500'000 + 250x = 5250x$

$0.5x^2 + 3250x + 1'500'000 = 5250x$

$0.5x^2 - 2000x + 1'500'000 = 0$

$\frac{2000 \pm 1000}{1} = \begin{cases} \underline{\underline{3000}} \\ \underline{\underline{1000}} \end{cases}$

100/235)



1. Kathete 15 cm
2. " 20 cm
3. " 25 cm

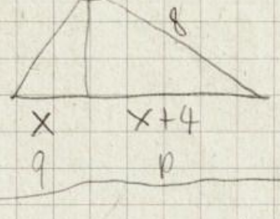
$(3x)^2+(4x)^2 = (4x+5)^2$

$9x^2+\cancel{16x^2} = \cancel{16x^2}+40x+25$

$9x^2-40x-25=0$

$\frac{40\pm 50}{18} = \begin{cases} 5 \\ -\frac{5}{9} \text{ (unmöglich)} \end{cases}$

100/237)



$64 = (2x+4)(x+4)$

$140 = 2x^2+12x-48$

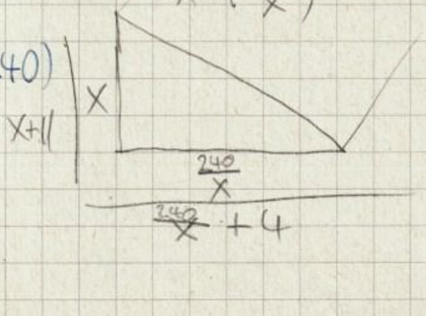
$x^2+6x-24=0$

$\frac{-6 \pm\sqrt{132}}{2} = \frac{-6\pm 2\sqrt{33}}{2} = -3\pm\sqrt{33}$

$x = q$

gesucht $= 2x+4$

100/240)



$(x+11)^2+\left(\frac{240}{x}+4\right)^2 = x^2+\left(\frac{240}{x}\right)^2+549$

$\cancel{x^2}+22x+\cancel{\left(\frac{240}{x}\right)^2}+121+\frac{1920}{x}+16 = \cancel{x^2}+\cancel{\left(\frac{240}{x}\right)^2}+549 \quad |\cdot x$

$22x^2-412x+1920=0$

$11x^2-206x+960=0$

$\frac{206\pm 14}{22} = \begin{cases} \underline{\underline{10}} \\ \frac{192}{22} = \underline{\underline{\frac{96}{11}}} \end{cases}$

99/224)

$1.K = x+500 = 2500$ Fr.
$2.K = x \qquad 2000$ Fr.

Zf.: $\frac{6500}{2500} = 2.6\%$
Zf.: $\frac{7200}{2000} = 3.6\%$

$$\frac{x}{100}\left(\frac{6500}{x+500}+1\right) = 72$$
$$x\left(\frac{6500}{x+500}+1\right) = 7200$$
$$\frac{6500x}{x+500} + x = 7200$$
$$6500x + x^2 + 500x = 7200x + 3'600'000$$
$$x^2 - 200x - 3'600'000 = 0$$
$$x = \frac{200 \pm 3800}{2} = 2000$$

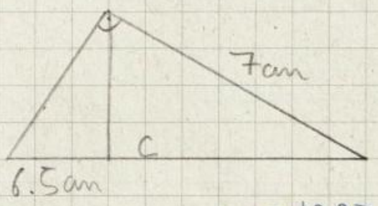
98/223)

$x = 1.$ Kapital $= 600 / 1200$
$x+300 = 2.$ Kapital $= 900/1500$

$$\frac{x+300}{100}\left(\frac{2400}{x}+1\right) = 45$$
$$(x+300)\left(\frac{2400}{x}+1\right) = 4500$$
$$\frac{2400 + 720'000}{x} + x + 300 = 4500$$
$$2400x + 720'000 + x^2 + 300x = 4500x$$
$$x^2 - 1800x + 720'000 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{1800 \pm 600}{2} = \begin{cases} 1200 \\ 600 \end{cases}$$

Zf 1.K.: 2%, 4%
Zf. 2.K.: 3%, 5%

100/236)

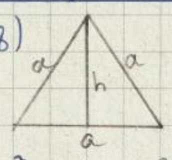


$x = c$

$$x(x-6.5) = 49$$
$$x^2 - 6.5x - 49 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{6.5 \pm 15.435349}{2} = 10.967675$$

$\underline{c = \approx 10.97cm}$

100/238)

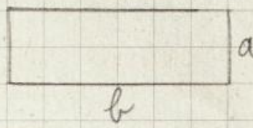


$a = x \qquad a - h = 4$

$\underline{a_1 = 29.856406 \quad h_1 = 25.856406}$

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = (x-4)^2$$
$$x^2 - \frac{x^2}{4} = x^2 - 8x + 16$$
$$-x^2 = -32x + 64$$
$$x^2 - 32x + 64 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{32 \pm 27.712813}{2} = \begin{cases} 29.856406 \\ 2.1435935 \text{ unmöglich} \end{cases}$$

99/225)



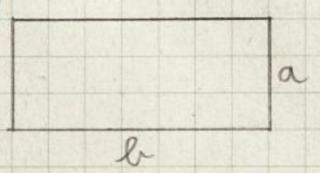
$b = x \quad F = 7.2 m^2$

$b - a = 11.4m$

$$\frac{7.2}{x} = x - 11.4$$
$$7.2 = x^2 - 11.4x$$
$$x^2 - 11.4x - 7.2 = 0$$
$$x = \frac{11.4 \pm 12.6}{2}$$

$a = x = 12$ $\quad$ **a = 12m**
$b = 0.6$ $\quad$ **b = 0.6m**

99/226)

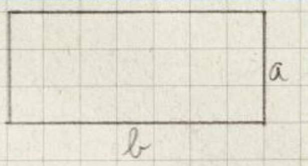


$a + b = 6.9dm$
$F = 11.9dm^2$
$b = x$

$$x(6.9 - x) = 11.9$$
$$6.9x - x^2 = 11.9$$
$$x^2 - 6.9x + 11.9 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{6.9 \pm 0.1}{2} \quad x_1 = 3.5dm \quad x_2 = 3.4dm$$

$a_1 = 3.4dm \quad b_1 = 3.5dm$
$a_2 = 3.5dm \quad b_2 = 3.4dm$

99/227)

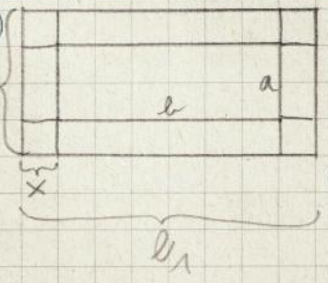


$U = 252m$
$F = 3888m^2$
$a + b = 126m$
$b = x$

$$x(126 - x) = 3888$$
$$126x - x^2 = 3888$$
$$x^2 - 126x + 3888 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{126 \pm 18}{2} = x_2 = 54m \quad x_1 = 72m$$

$a_1 = 72m \quad b_1 = 54m$
$a_2 = 54m \quad b_2 = 72m$

99/228)



$a = 2m$
$b = 3m$ $\rightarrow F = 6m^2$ $\quad F_{Beet} = F_{Rasen}$

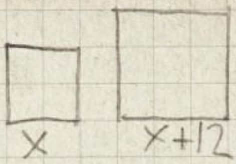
$$ab = (a+2x)(b+2x) - ab$$
$$2ab = ab + 2ax + 2bx + 4x^2$$
$$4x^2 + x(2a + 2b) - ab = 0$$
$$4x^2 + 10x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-10 \pm 14}{8} = 0.5m$$

$a_1 = 3m$

$b_1 = 4m$

Breite der Einfassung: 0.5m

99/229)



x = Seite des ersten Hofes

$x^2+(x+12)^2=2120$

$x^2+x^2+24+144=2120$

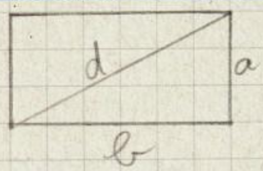
$2x^2+24-1976=0$

$x^2+12-988=0$

$x=\frac{-12\pm 64}{2}=26$

Seite des ersten Hofes: 26m ||
Seite des zweiten Hofes: 38m ||

99/231)



$d=5m$
$b-a=1m$
$x=b$

$x^2+(x^2-2x+1)=25$

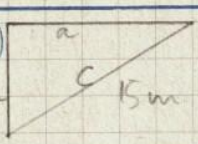
$2x^2-2x+1=25$

$x^2-x-12=0$

$x=\frac{1\pm 7}{2}=4$

$\underline{\underline{a=3m,\ b=4m}}$

99/[232])



$a+c=15m$
$a+b=21m$
$x=a$

$x^2+(21-x)^2=225$

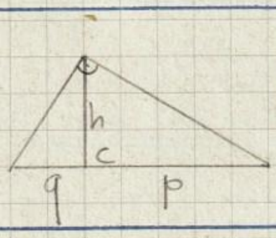
$x^2+441-42x+x^2=225$

$x^2-21x+108=0$

$x=\frac{21\pm 3}{2}=12$

$\underline{\underline{a=12m,\ b=9m}}$

99/233)



$h=5cm$
$p-q=2.25cm$
$p=x$

$25=x(x-2.25)$

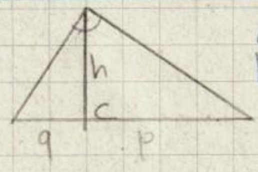
$25=x^2-2.25x$

$x^2-2.25x-25=0$

$x=\frac{2.25\pm 10.25}{2}=6.25cm$

$\underline{\underline{c=8.5cm}}$

99/234)



$c=13cm$
$h=6cm$
$x=p$

$36=x(13-x)$

$36=13x-x^2$

$x^2-13x+36=0$

$x_{1/2}=\frac{13\pm 5}{2}=9,4$

$p_1=9 \quad q_1=4$ ||
$p_2=4 \quad q_1=9$ ||

98/217

x = Anzahl Personen

$\frac{270}{x}=\frac{270}{x+3}-1$

$\cancel{27}x-810=\cancel{27}x-x^2+3x$

$x^2-3x-810=0$

$x=\frac{3\pm 57}{2}=30$

98/218) ~~x=~~ ♂

$\frac{24}{x}+1=\frac{24}{14-x}$

$24(14-x)+x(14-x)=24x$

$336-24x+14x-x^2=24x$

$-x^2-34x+336=0$

$x=\frac{34\pm 50}{-2}=8$

8 Männer ||
6 Frauen ||

98/216) x = Anzahl ♂ = 2, ♀ = 4

$\frac{18}{x}=\frac{24}{6-x}+3$

$\underline{x}=\frac{60\pm 48}{6}=\underline{\underline{2}}$

$108-18x=24x+18x-3x^2$

$3x^2-60x+108=0$

99/230 x = Seite

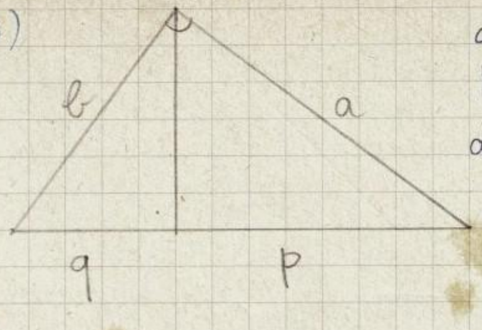
$x+a=x\sqrt{2}$

$a=x\sqrt{2}-x$

$a=x(\sqrt{2}-1)$

$\underline{\underline{x=\frac{a}{\sqrt{2}-1}}}$

100/239)



$a - b = 5cm$

$p - q = 7cm$

$a^2 + b^2 = (p+q)^2$

$b = (p+q)q$

$b = [(7+q)+q]q = (2q+7)q$

$a : b = p : q$

$aq = bp$

$(b+5)q = bp$

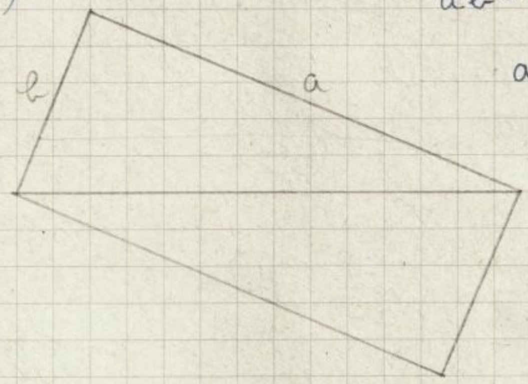
$(b+5)q = b(7+q)$

$[(2q+7)q+5]q = (2q+7)q$

$(2q^2+7q+5)q = 2q^2+7q$

$2q^3+7q^2+5q = 2q^2+7q$

100/241)



519.9827

$ab = 480 \quad \left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{8}{15}b\right)^2 = c^2 - 756 \qquad b = \frac{480}{a}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{8}{15}b\right)^2 = a^2 + b^2 - 756$

$\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3840}{15a}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{480}{a}\right)^2 - 756$

$\frac{9}{16}a^2 + \frac{65'536}{a^2} = a^2 + \frac{230'400}{a^2} - 756 \quad | \cdot a^2$

$\frac{9}{16}a^4 + 65536 = a^4 + 230400 - 756a^2$

$756\frac{5}{4}a^2 = 164867$

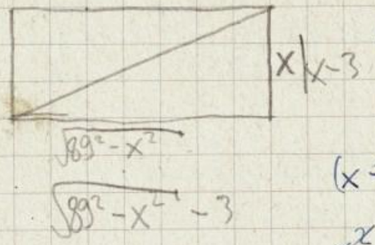
$757.25a^2 = 164867$

$a = 14.755138 cm$

$b = 32.531041 cm$

$c = 35.72090 cm$

8)



$d = 89m$

$x-3$

$(x-3)^2 + \left[\sqrt{89^2-x^2}-3\right]^2 = 85^2$

$x^2-6x+9+89^2-\cancel{x^2}-6\sqrt{89^2-x^2}+9=85^2$

$-6\sqrt{89^2-x^2} = 6x + 18 + 85^2 - 89^2$

$\sqrt{(89^2-x^2)} = x + 3 - 113$

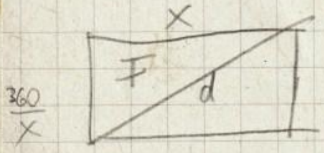
$\sqrt{(89^2-x^2)} = x - 119$

$89^2-x^2 = x^2-238x+119^2$

$2x^2-238x+119^2-89^2=0$

$x^2-119x+3120$ $\quad x_1 = 80\,m$

$x_2 = 39\,m$



$F = 180cm^2$
$d = 41cm$

$x^2 + \left(\frac{360}{x}\right)^2 = 41^2$ $\quad x^2 = y$

$x^2 + \frac{360^2}{x^2} = 41^2$ $\quad x_1^2 = 1600 \quad x_1 = 40$

$x^4 - 41^2x^2 + 360^2$ $\quad x_2^2 = 81 \quad x_2 = 9$

$y^2 - 1681y + 129600 = 0$

$\frac{1681 \pm 1519}{2}$ $\begin{cases} 1600 \\ 81 \end{cases}$

Potenzen (mit natürlichen Exponenten)

$a^n \ (a \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N})$ — a^n = Potenz

Def.: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ — a = Grundzahl, Basis; n = Exponent, Hochzahl

Eigenschaften:

1. Alle Potenzen einer positiven Zahl sind positiv
2. Potenzen einer neg. Grundzahl mit geraden Exponenten sind positiv, mit ungeraden Exponenten negativ.
3. Alle Potenzen von 1 heissen 1.
   Alle Potenzen von 0 heissen 0.

Das Rechnen mit Potenzen

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

weil $a^n \cdot a^k = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{k \text{ Faktoren}}}_{(n+k)\text{-Faktoren}}$

(Zwei) Potenzen der gleichen Basis multipliziert man miteinander, indem man diese Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Bsp. $3^7 \cdot 3 = 3^8$

$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$

$5^2 \cdot 5^7 \cdot 5 = 5^{10}$

Division von Potenzen der gleichen Basis

$$a^n : a^k = \begin{cases} 1.\ n > k & = a^{n-k} \\ 2.\ n = k & = 1 \\ 3.\ n < k & = \dfrac{1}{a^{k-n}} \end{cases}$$

Bsp.: $5^7 : 5^5 = 25$ — $2048 : 128 = 2^{11} : 2^7 = 2^4 = 16$

$7^3 : 7^2 = 7$ — $\dfrac{64}{1024} = \dfrac{2^6}{2^{10}} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

Potenzieren von Potenzen

$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12}$

$2^{(3^4)} = 2^{81}$

Allgemein: $(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{k\ \text{Faktoren}} = a^{k \cdot n}$

Eine Potenz ~~Po~~ potenziert man, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

$2^5 \cdot 5^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

Allgemein: $a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenzen mit dem gleichen Exponenten werden multipliziert bzw dividiert, indem man das Produkt bzw. den Quotienten der Grundzahlen mit dem gleichen Exponenten potenziert.

$(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$20^6 = 2^6 \cdot 10^6 = 64'000'000$

9/50 a) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \underline{1}$ ✓ b) $2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{5}\right)^4}}$ ✓ c) $\left(5\frac{3}{13}\right)^3 \cdot \left(1\frac{9}{17}\right)^3 = \left(\frac{68}{13}\right)^3 \cdot \left(\frac{26}{17}\right)^3 =$

$\left(\frac{1768}{221}\right)^3 = \underline{\underline{512}}$ ✓

9/51 a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \underline{\underline{-1}}$ ✓ b) $\left(4\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(1\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{33}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{14}{11}\right)^2 = \left(\frac{462}{77}\right)^2 = \underline{\underline{36}}$ ✓

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^8 \cdot \left(1\frac{4}{5}\right)^8 = \left(\frac{5}{9}\right)^8 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^8 = \underline{\underline{1}}$ ✓ d) $\left(1\frac{6}{7}\right)^8 \cdot \left(5\frac{5}{13}\right)^8 = \left(\frac{13}{7}\right)^8 \cdot \left(\frac{70}{13}\right)^8 - \frac{650}{65} = \underline{\underline{100\ \text{Mio.}}}$ ✓

e) $2^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^7 = \left(-\frac{6}{12}\right)^7 = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}\right)^7}}$ ✓

8/37) $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 27\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 18 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1000\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

$\frac{8}{3} + \frac{9}{2} - 1 - \frac{9}{5} - \frac{125}{12} + 64 =$

$\frac{160 + 270 - 60 - 108 - 625}{60} + 64 = 64 - 6\frac{1}{20} = \underline{\underline{57\frac{19}{20}}}$

10/55a) $\left(\frac{ax}{by}\right)^n \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^n = \left(\frac{a\cancel{xy}}{b\cancel{xy}}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

e) $\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^3 \cdot \left(\frac{xy}{\frac{x+y}{2}}\right)^3 = \left[\frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{xy}} \cdot \frac{2\cancel{xy}}{\cancel{x+y}}\right]^3 = [2(x-y)]^3$

10/66a) $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{4}{9}\right)^4 = \left(\frac{10}{18}\right)^4 : \left(\frac{4}{9}\right)^4 = \left(\frac{90}{72}\right)^4 = \underline{\underline{\left(\frac{5}{4}\right)^4}}$

b) $\left[\left(3\frac{13}{14}\right)^5 : \left(2\frac{5}{14}\right)^5\right] : \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left[\left(\frac{55}{14}\right)^5 : \left(\frac{33}{14}\right)^5\right] : \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left[\frac{770}{462} : \frac{5}{6}\right]^5 = \left(\frac{154}{77}\right)^5 = 2^5 = \underline{\underline{32}}$

13/111) $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) \cdot (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3) =$

$a^6 \cancel{-2a^5b} + 2a^4b^2 \cancel{-a^3b^3} \cancel{+2a^5b} \cancel{-4a^4b^2} \cancel{+4a^3b^3} \cancel{-2a^2b^4} \cancel{+2a^4b^2} \cancel{-4a^3b^3} \cancel{+4a^2b^4} \cancel{-2ab^5}$

$\cancel{+a^3b^3} - 2a^2b^4 \cancel{+2ab^5} - b^6 = a^6 + 2a^4b^2 - 2a^2b^4 - b^6$

11/68) a) $(2a \pm b)^2 = (2a+b)^2 = (2a+b)(2a+b) = 4a^2 + 4ab + b^2$
$(2a-b)^2 = (2a-b)(2a-b) = 4a^2 - 4ab + b^2$ ✓

b) $(3x \pm 2y)^2 = (3x+2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
$(3x-2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$ ✓

c) $\left(\frac{3}{a} \pm \frac{4}{b}\right)^2 = \left(\frac{3}{a} + \frac{4}{b}\right)^2 = \frac{9}{a^2} + \frac{24}{ab} + \frac{16}{b^2}$
$\left(\frac{3}{a} - \frac{4}{b}\right)^2 = \frac{9}{a^2} - \frac{24}{ab} + \frac{16}{b^2}$ ✓

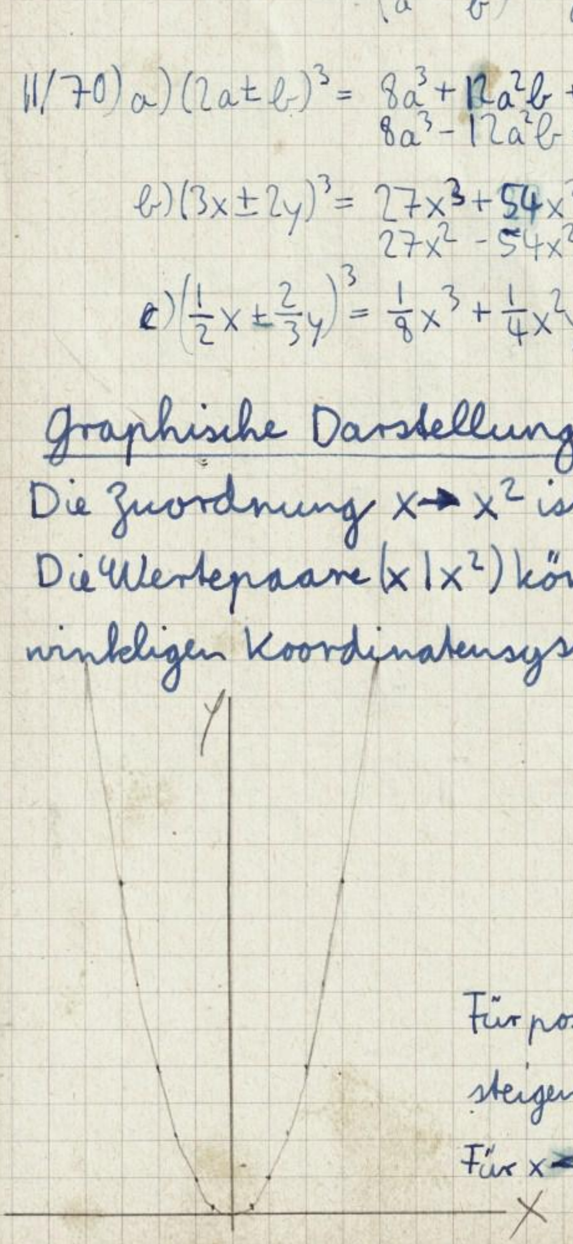
11/70) a) $(2a \pm b)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$ ✓
$8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$ ✓

b) $(3x \pm 2y)^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$ ✓
$27x^2 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

c) $\left(\frac{1}{2}x \pm \frac{2}{3}y\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{3}{9}y^3$ ✓

Graphische Darstellung

Die Zuordnung $x \to x^2$ ist definiert für jeden $x \in R$ und eindeutig.
Die Wertepaare $(x | x^2)$ können als Koordinaten von Punkten eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgefaßt werden



x	$y = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4
±3	9

$(x+\varepsilon)^2 > x$ wenn x positiv ist

$x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 = x^2$

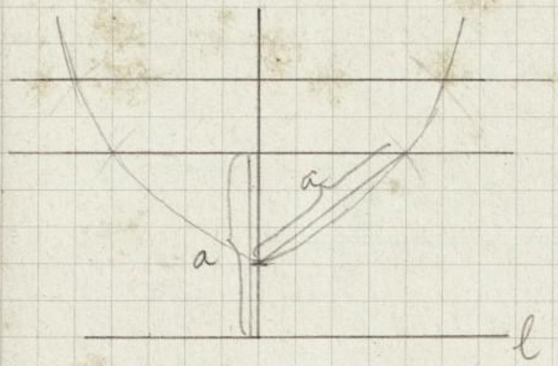
$2x\varepsilon + \varepsilon^2 => 0$

Für positive x-Werte ist die Funktion $y = x^2$ monoton steigend.

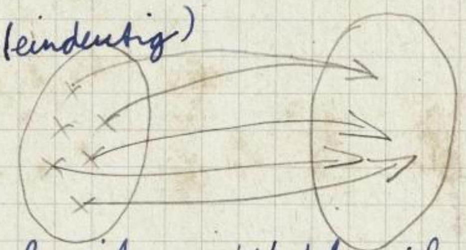
Für $x < 0$ ist die Funktion $y = x^2$ monoton fallend.

Der Graph von $y=x^2$ ist axialsymetrisch bezüglich der y-Achse.

Die Parabel ist der geom. ~~Ort~~, w



Funktion (eindeutig)



Definitionsbereich Wertebereich

Relation (nicht eindeutig): $y < 5$

Die Zuordnung $x \Rightarrow x^3$ ist auch eine Funktion. $(x \in \mathbb{R})$

$y^2 = x$

x	$y=x^3$
0	0
1	1
-1	-1
2	8
-2	-8
3	27
0.5	0.125
-0.5	-0.125
1.5	3.375
-1.5	-3.375

$f(-x) = -f(x)$

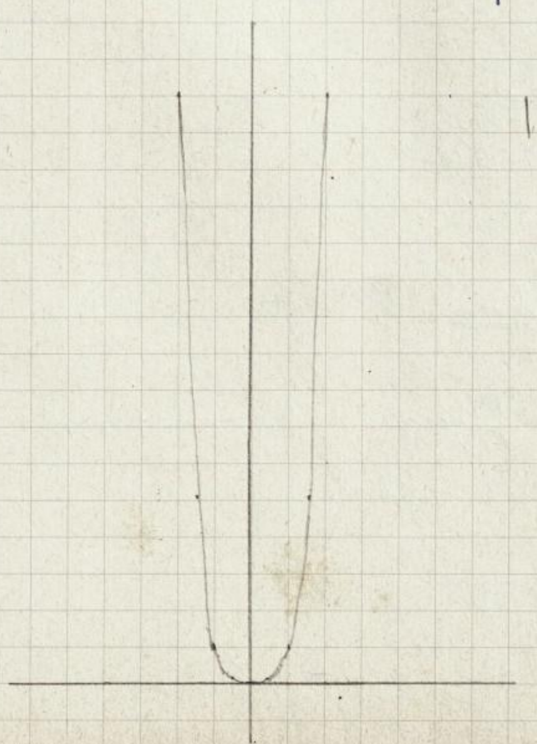
Die Kurve ist punktsymetrische bezüglich des

<u>Allgemein</u>

Die Funktionenbilder nähern sich der Form ⊔ bzw. ┤ mit wachsenden geraden bzw. ungeraden Exponenten.

x	$y=x^4$
0	0
1	1
-1	1
±2	16
±0.5	$\frac{1}{16}$
±1.5	$5\frac{1}{16}$

16/160, 161, 163, 164



16/160) a) $(a^{10}+a^8-a^6):a^5=a^5+a^3-a$ c) $(48m^6+36m^5):12m^4=4m^2+3m$

b) $(16x^5-12x^4):4x^2=4x^3-3x$ d) $(60x^4y^3+30x^3y^2):15x^2y=4x^2y^2+2xy$

161) a) $(12.1y^7+7.7y^5):1.1y^3=11y^4+7y^2$

b) ~~$(35a^9-87a^8+54a^7):(7a^5-9a^4)=$~~

16/163) $(a^7-6a^6b^3+14a^5b^6-12a^4b^9):(a^3-2a^2b^3)=\underline{\underline{a^4-4a^3b^3+6a^2b^6}}$

$-(a^7-2a^6b^3)$

$-4a^6b^3+14a^5b^6-12a^4b^9$

$-(-4a^6b^3+8a^5b^6)$

$6a^5b^6-12a^4b^9$

$-(6a^5b^6-12a^4b^9)$

164) $(15a^6b^4-2a^5b^5-24a^4b^6):(3a^2b-4ab^2)=\underline{\underline{5a^4b^3+6a^3b^4}}$

$-(15a^6b^4-20a^5b^5)$

$18a^5b^5-24a^4b^6$

$18a^5b^5-24a^4b^6$

163) $a^4-4a^3b^3+2a^2b^6$

164) $5a^4b^3+6a^3b^4$

16/165) $(144a^4-289a^2b^2+100b^4):(12a^2+7ab-10b^2)=\underline{\underline{12a^2-7ab-10b^2}}$

$-(144a^4+84a^3b-120a^2b^2)$

$-84a^3b-169a^2b^2+100b^4$

$-(-84a^3b-49a^2b^2+70ab^3)$

$-120a^2b^2+70ab^3+100b^4$

$-(-120a^2b^2+70ab^3+100b^4)$

0

Definition $a^0\equiv 1 \quad (a\neq 0)$ Definition $a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0)$

$\frac{1}{a^{p-n}}=a^{n-p}$ Erfüllen Potenzen mit neg. Exponenten die bisherigen Rechenregeln?

$\frac{1}{a^3}=a^{-3}$

$(ab)^n=a^n+b^n$ $(a^n)^p=a^{np}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $a^n\cdot a^p=a^{n+p}$

$a^n:a^p=a^{n-r}$

Beweise 1) $(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} = \frac{1}{b^{-n}} \cdot a^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

3) $(a^n)^{-p} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$

4) $(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$

5) $(a^{-n})^{(-p)} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{(-p)} = (a^n)^p = a^{np} = a^{(-n)\cdot(-p)}$

4) $(a^{-n}) \cdot (a^{-p}) = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{n+p}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+p} = a^{-(n+p)}$

5) $a^n : a^p = a^{n-p} \quad (a \neq 0)$

Eine Potenz einer rationalen Zahl $a \neq 0$ mit einem negegativen Eseponenten wird berechnet, indem man den Kehrwert der Basis mit dem entsprechenden positiven ganzen Eseponenten potenziert.

$$
\begin{aligned}
&(a^{-3} + b^{-3}) : a^{-1} + b^{-1} = a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2} \\
&-(a^{-3} + a^{-2}b^{-1}) \\
&\quad +a^{-2}b^{-1} + b^{-3} \\
&\quad -(-a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2}) \\
&\qquad\quad -a^{-1}b^{-2} + b^{3} \\
&\qquad\quad -(a^{-1}b^{-2} + b^{3}) \\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

19/202) a) $3^{-5} \cdot 3^{-2} = 3^{-7}$ d) $10^8 \cdot 10^{-10} = 10^{-2}$ g) $(2{,}8 \cdot 10^{12}) \cdot (2 \cdot 10^{-6}) = \cancel{2 \cdot 10^6} =$ ~~2 Mio.~~

b) $4^7 \cdot 4^{-3} = 4^4$ e) $5 \cdot 7^6 \cdot 7^{-4} = 5 \cdot 7^2 = 70$

c) $5^3 \cdot 5^{-6} = 5^{-3}$ f) $3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^0 = 3$ h) $(3{,}5 \cdot 10^{11}) \cdot (4 \cdot 10^{-20}) = \cancel{14 \cdot 10^{-9}}$

i) $(8 \cdot 10^{-9}) \cdot (0{,}125 \cdot 10^{-12}) \cdot (4 \cdot 10^{10}) = 4 \cdot 10^{-11}$ ✓

203) a) $a^5 \cdot a^{-3} = a^2$ b) $b^4 \cdot b^{-6} = b^{-2}$ c) $c^{-3} \cdot c^{-4} = c^{-7}$ d) $md^{-5} \cdot nd^{-6} = \cancel{d^{-5}(m+n)}$ mnd^{-11}

e) $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$ f) $a^{-p} \cdot a^q = a^{q-p}$ g) $b^{-p} \cdot b^{-q} = b^{-p-q}$ h) $mx^{-a} \cdot nx^{-b} = \cancel{[x(m+n)]^{-a-b}}$

mnx^{-a-b}

$20/206$ a) $(a^3+4a^{-3}-2)\cdot(a+2a^{-2}) = a^4+\cancel{2a}+\cancel{4a^{-2}}+8a^{-5}-\cancel{2a}-\cancel{4a^{-2}} = \underline{\underline{a^4+8a^{-5}}}$

b) $(9a^2+2a^{-2}+6)\cdot(9a^2+2a^{-2}-6) = (9a^2+2a^{-2})^2-36 =$

$81a^4+\cancel{36}+4a^{-4}-\cancel{36} = \underline{\underline{81a^4+4a^{-4}}}$

$20/219$ a) $(12x^{-n}y^{2n}+16x^{2-n}y^{4n}-20x^{-(n-2)}y^{-2n}):(4x^{-(n+1)}\cdot y^{-4n}) = \underline{\underline{3xy^{6n}\,4x^3y^{8n}-5x^3y^{2n}}}$

b) richtig ordnen!

$[x^{-(2n+1)}+4x^{-2n}+8x^{-(2n-1)}+7x^{-(2n-2)}+4x^{-(2n-3)}]:(x^{-(n+1)}+x^{-n}+x^{-(n-1)}) = \underline{\underline{x^{-n}+3x^{-n+1}+4x^{-n+2}}}$

$-(x^{-(2n+1)}+x^{-2n}+x^{-(2n-1)})$

$3x^{-2n}+7x^{-(2n-1)}+7x^{-(2n-2)}+4x^{-(2n-3)}$

$-(3x^{-2n}+3x^{-(2n-1)}-3x^{-(2n-2)})$

$4x^{-(2n-1)}-4x^{-(2n-2)}+4x^{-(2n-3)}$

$-(4x^{-(2n-1)}-4x^{-(2n-2)}+4x^{-(2n-3)})$

0

$21/220$ a) $(x^{-4}-x^{-6}):(x^{-2}-x^{-3}) = \underline{\underline{x^{-2}+x^{-3}}}$

$-(x^{-4}-x^{-5})$

x^{-5}

$x^{-5}-x^{-6}$

0

210

220 b d

222

c) $(m^{-9}-n^6):(m^{-3}-n^2) = \underline{\underline{m^{-6}+m^{-3}n^2+n^4}}$

$-(m^{-9}-m^{-6}n^2)$

$+m^{-6}n^2-n^6$

$-(m^{-6}n^2-m^{-3}n^4)$

$m^{-3}n^4-n^6$

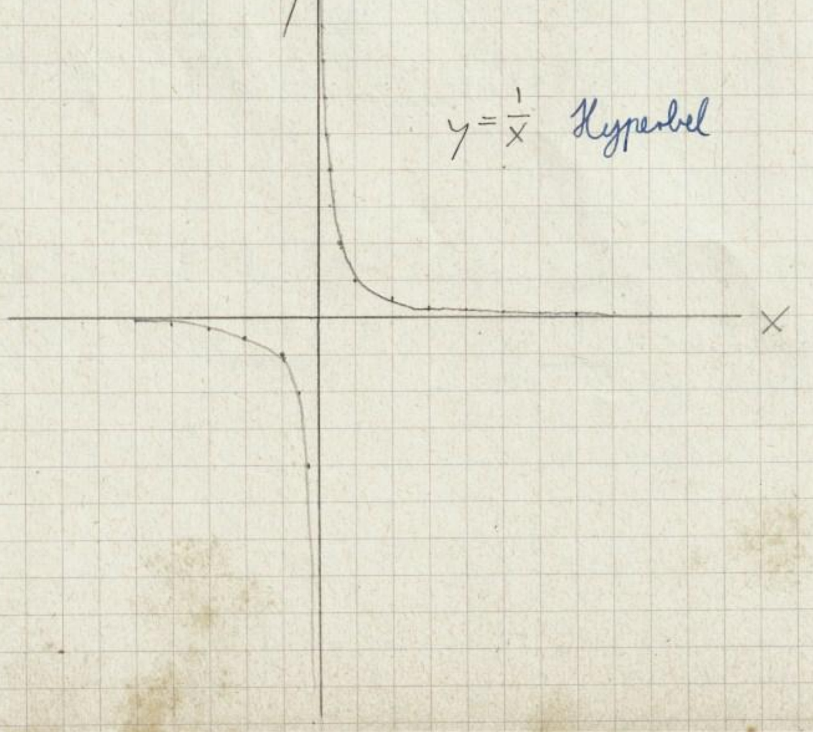
$-(m^{-3}n^4-n^6)$

0

Graphische Funktionen $y = x^{-1} = y = \frac{1}{x}$

$y = 1 \quad x = 1$

$x = \frac{1}{2}$



20/210 a) $(a^{-x}+b^{-y})\cdot(a^{-x}-b^{-y}) = a^{-2x}-\cancel{a^{-x-y}}+\cancel{a^{-x-y}}-b^{-2y} = \underline{\underline{a^{-2x}-b^{-2y}}}$ ✓

b) $(a^{-x}+b^{y})\cdot(a^{x}-b^{-y}) = \cancel{1} - a^{-x}b^{-y}+a^{x}b^{y}-\cancel{1} = \underline{\underline{a^{x}b^{y}-a^{-x}b^{-y}}}$ ✓

c) $(x\pm x^{-1})^2 = \cancel{x^2+x}\ \cancel{x^2 \pm x^{-2}}\quad x^2\pm 2x^0+x^{-2} = x^2\pm 2+x^{-2}$ ✓

d) $(x+2x^{-1})^{-2} = (x^2+4+4x^{-2})^{-1} = \dfrac{1}{x^2+4+4x^{-2}}$ ✓

e) $\left(\dfrac{x}{2}\pm\dfrac{x^{-1}}{3}\right)^{-2} = \dfrac{x^2}{4}\pm\dfrac{2x^0}{6}+\dfrac{x^{-2}}{9} = \underline{\underline{\dfrac{x^2}{4}\pm\dfrac{1}{3}+\dfrac{x^{-2}}{9}}}$

=

~~20/220) a) $(x^{-4}-x^{-6}):(x^{-2}-x^{-3}) = x^{-2}-x-x^{-4}+x^{-3} = \underline{\underline{-x+x^{-2}+x^{-3}-x^{-4}}}$~~

~~b) $(x^2-x^{-2}):(x^{-1}+x^{-2}) = x^3-x^2+x^{-1}-x^{-2}$~~

~~$-(x^2+x)$~~

~~$-x-x^{-2}$~~

~~$-(-x-1)$~~

~~$1-x^{-2}$~~

~~$-(1+x^{-3})$~~

~~$-x^{-3}-x^{-2}$~~

~~$-(-x^{-3}-x^{-1})$~~

~~$1-x^{-2}$~~

a) $(x^{-4}-x^{-6}):(x^{-2}-x^{-3}) = \underline{\underline{x^{-2}=x^{-3}}}$ ✓

$-(x^{-4}-x^{-5})$

$x^{-5}-x^{-6}$

$-(x^{-5}-x^{-6})$

0

b) $(x^2-x^{-2}):(x^{-1}+x^{-2}) = \underline{\underline{x^3-x^2+x+1}}$ ✓

$-(x^2+x^1)$

$-x-x^{-2}$

$-(-x-1)$

$1-x^{-2}$

$-(1+x^{-1})$

$-x^{-1}-x^{-2}$

$-(-x^{-1}-x^{-2})$

0

c) $(m^{-9}-n^6):(m^{-3}-n^2) = \underline{\underline{m^{-6}+m^{-3}n^2+n^4}}$ ✓

$-(m^{-9}-m^{-6}n^2)$

$m^{-6}n^2-n^6$

$-(m^{-6}n^2-m^{-3}n^4)$

$m^{-3}n^4-n^6$

$-(m^{-3}n^4-n^6)$

0

d) $(a^{12}-a^{-10}):(a^6+a^{-5}) = \underline{\underline{a^6-a^{-5}}}+a^{-6}$ ✓

$-(a^{12}+a)$

$-a-a^{-10}$

$-(-a-a^{-10})$

$a^{-10}-a^{10}$

$a^{-10}+a^{-21}$

~~21/221~~ 210 e) $\left(\dfrac{x}{2}\pm\dfrac{x^{-1}}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{4}\pm\dfrac{2x^0}{6}+\dfrac{x^{-2}}{9}} = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{4}\pm\dfrac{1}{3}+\dfrac{x^{-2}}{9}} = \dfrac{36}{9x^2\pm 12+4x^{-2}} = \underline{\underline{\dfrac{36x^2}{9x^4\pm 12x^2+4}}}$

21/222)

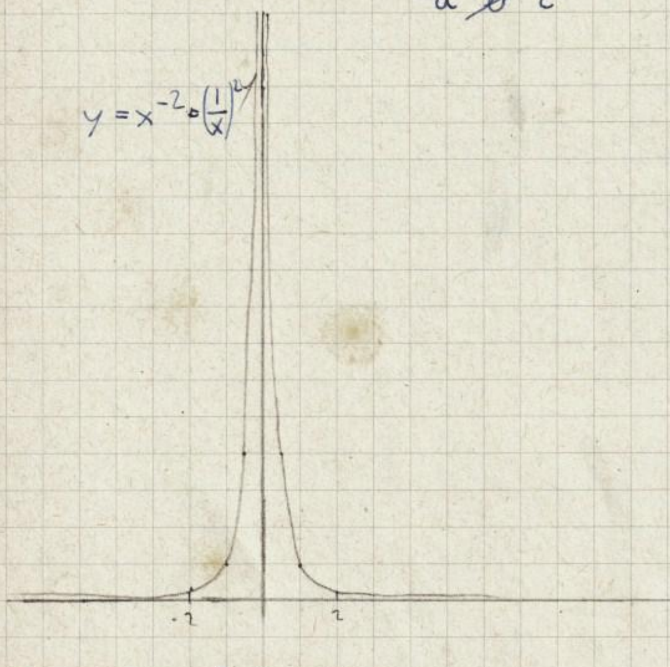
$$(a^{-2}b^{-1}c^3+a^{-4}b^3c^3+a^{-5}b^6-2ac-2a^{-1}b^4c-2a^{-2}b^7c^{-2}):(a^{-3}b-2b^2c^{-2})=$$

$$(a^{-5}b^6+a^{-4}b^3c^3+a^{-2}b^{-1}c^3-2a^{-2}b^7c^{-2}-2a^{-1}b^4c-2ac):(a^{-3}b-2b^2c^{-2})=\underline{\underline{a^{-2}b^5+a^{-1}b^2c^3+ab^{-2}c^3}}$$

$$\underline{-a^{-5}b^6+2a^{-2}b^7c^{-2}}$$

$$-a^{-4}b^3c^3+2a^{-1}b^4c^{-2}$$

$$-a^{-2}b^{-1}c^3 \qquad +2ac$$



Rationale Zahlen

$a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a=\frac{p}{q}$ mit $p,q \in \mathbb{Z}$

12.73

$3.25\overline{25}\cdots$

$0.0\overline{723}\cdots$

$$\cancel{Z=1273592\cdots}$$
$$\cancel{10000\,Z=12735.92\cdots}$$
$$\cancel{9999Z=12734.6557}$$

$$\begin{array}{rl} 10000Z=12735.\overline{92}92\overline{92}\cdots & + \\ Z=\quad 1.273592\cdots & - \\ \hline 9999Z=12734.6557 & \end{array}$$

$$Z=\frac{12734{,}6557}{9999}=\frac{127346557}{99990000}$$

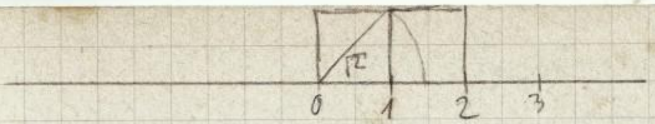
$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Bew.: Wäre $\sqrt{2}$ rational, so könnte man schreiben: $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind und der Bruch $\frac{p}{q}$ nicht mehr gekürzt werden kann.

Quadriert man beide Seiten: $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$

$$2=\frac{p^2}{q^2}=\frac{p\cdot p}{q\cdot q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p}{q}$$

$\frac{p}{q}$ müsste also aufgehen. Die Annahme $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ ist also falsch.



Auf der Zahlengeraden gibt es Punkte, denen keine Zahl $\in \mathbb{Q}$ entspricht.

0 1 Zwischen 0 u. 1 gibt es mehr Zahlen $\in$ irrationale Zahlen als Zahlen $\in \mathbb{Q}$

Abzählbare Unendlichkeit:

Die Anzahl der Elemente der Menge der Zahlen $\in \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \updownarrow \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 \end{array}$$

→ Es gibt genau so viele 7-er Zahlen wie es natürliche Zahlen gibt.

Die Menge der Zahlen $\in \mathbb{Q}$ hat auch („nur") abzählbar unendlich viele Elemente.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{2} & \frac{9}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{9}{3} & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \dots \end{array}$$

Zuordnung zu den Zahlen $\in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{2}{2} & \frac{1}{3} & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \end{array}$$

Wären die irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählbar unendlich, so könnte man eine Liste aufstellen:

1. $0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}$
2. $0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}$
3. $0. a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}$
4. $0. a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ a_{45}$
5. $0. a_{51} \dots$

a_{2k} a_{11}

Zeile Ziffer

Diese Liste kann nicht vollständig sein, denn man kann ohne Mühe eine irrationale Zahl finden, welche nicht in dieser Liste vorkommt:

$Z = 0. b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$

so, dass
$$\begin{array}{ll} b_1 \neq a_{11} & b_1 \neq 0 \\ b_2 \neq a_{22} & b_2 \neq 0 \\ b_3 \neq a_{33} & b_3 \neq 0 \\ b_4 \neq a_{44} & \dots \\ b_5 \dots \end{array}$$

Diese Zahl ist in der Liste nicht enthalten, weil sie sich von der ersten Zahl mindestens in der ersten Ziffer, von der zweiten mindestens in der zweiten Ziffer ... unterscheidet.

Rechnen mit Wurzeln

Wurzelindexe $\longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a} = x \quad x^n = a$

Radikand

$\sqrt{-5}$ = existiert nicht

$\sqrt[n]{a} = Z_1$ $\qquad Z_1 \neq Z_2 \qquad (z_1)^n \neq (z_2)^n$

$\sqrt[n]{a} = Z_2$

Def. Unter der n-ten Wurzel einer positiven Zahl a verstehen wir diejenige positive Zahl x, deren n-te Potenz a gibt.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a \quad (a > 0)\ (x > 0)$$

Beisp.: $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[3]{216} = 6$

Nicht jede Wurzel ist rational.

$1 < \sqrt{2} < 1$

1.4	1.5
1.41	1.42
1.414	1.415
1.4142	1.4143
1.41421	1.41422
1.414213	1.414214
u.s.w	
Unterzahlen, wachsen	Oberzahlen, fallen

Der Unterschied zw. Ober- u. Unterzahlen wird ständig kleiner.

Von einer Intervallschachtelung redet man, wenn es eine wachsende Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ① und eine fallende Folge $b_1, b_2, b_3 \ldots$ ② derart gegeben sind, dass $a_n < b_n$ für alle n ③ und $|b_n - a_n|$ ④ gegen 0 strebt mit wachsendem n.

$\sqrt{19'64'52} = 443,$

364 $\quad$:84·4

2852 $\quad$ ·88·3

20300 $\quad$:886

Statt mit Intervallschachtelungen rechnet man in der Praxis mit Näherungswerten.

6, 7, 8, 14 abc

25/6) $\sqrt[6]{729} - \sqrt[5]{243} - \sqrt[5]{3125} - \sqrt[3]{-125} = 3 - 3 - 5 + 5 = \cancel{-10} = \underline{\underline{0}}$ ✓

7) $\sqrt[4]{\frac{1}{256}} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$ ✓

8) $\sqrt[3]{0.027} + \sqrt[2]{0.0625} + \sqrt[5]{0.00243} = 0.3 + 0.25 + 0.3 = \underline{\underline{0.85}}$ ✓

14a) $\sqrt{16x^4-8x^2+1} = \underline{4x^2-1}$ ✓ b) $\sqrt{1-10z^2+25z^4} = \underline{1-5z^2}$ ✓

c) $\sqrt{9a^2+12ab+4b^2} = \cancel{3a+4b}\ \underline{3a+2b}$ ✓

$\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{108} = \sqrt{25\cdot 3} - \sqrt{16\cdot 3} + \sqrt{36\cdot 3} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = \underline{\underline{7\sqrt{3}}}$

<u>Rechnen mit Wurzelgrössen</u>

1) Nur gleichartige Wurzelgrössen können addiert werden.

$$\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} - 5\sqrt[3]{7} = \underline{\underline{-\sqrt[3]{7}}}$$

2) Sind a und b positiv und $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$ * , d.h.: die Reihenfolge von Radizieren und Multiplizieren ist vertauschbar, wenn es sich um die gleiche Wurzel handelt, wenn es sich um den gleichen Wurzelindex handelt.

Oder von links nach rechts gelesen:

Das Produkt zweier Wurzeln von gleichen Wurzelindex ist gleich der gleich hohen Wurzel aus dem Produkt der beiden Radikanden.

Oder von rechts nach links gelesen:

Die n-te Wurzel aus einem Produkt ist gleich dem Produkt aus den n-ten Wurzeln ~~der~~ seiner Faktoren.

$$\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{32} = \underline{2}$$

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32\cdot 3} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{3} = \underline{\underline{2\sqrt[5]{3}}}$$

<u>Beweis</u>: Die Gleichheit * behauptet die Gleichheit von positiven Zahlen. Potenzieren wir nun beide Seiten mit dem Exponenten n und stellen daraufhin die Gleichheit beider Seiten fest, so ist * richtig.

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n \overset{?}{=} (\sqrt[n]{ab})^n$$

$$(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n \overset{?}{=} ab$$

$$\boxed{a\cdot b = a\cdot b}$$

84, 85, 86, 99

31/84 a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{81}=\underline{\underline{9}}$ b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}=\sqrt{196}=\underline{\underline{14}}$

c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}=\sqrt{324}=\underline{\underline{18}}$ d) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}=\sqrt{625}=\underline{\underline{25}}$

31/85 a) $2\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}=2\sqrt{144}=\underline{\underline{24}}$, b) $3\sqrt{12}\cdot 4\sqrt{27}=12\sqrt{324}=12\cdot 18=\underline{\underline{216}}$ ✓

c) $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{45}=\frac{1}{3}\sqrt{225}=\frac{25}{3}=\underline{\underline{8\frac{1}{3}}}$ 5

31/86 a) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{16.9}=\sqrt{169}=\underline{\underline{13}}$ ✓ b) $\sqrt{10^3}\cdot\sqrt{12.1}=\sqrt{12100}=\underline{\underline{110}}$ ✓

c) $\sqrt{0.08}\cdot\sqrt{1.28}=\sqrt{0.1024}=\underline{\underline{0.32}}$ ✓

32/99 a) $\sqrt{\sqrt{8}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{8}-2}=\sqrt{(\sqrt{8}+2)(\sqrt{8}-2)}=\sqrt{8-4}=\underline{\underline{2}}$ ✓

→ b) $\sqrt[3]{\sqrt{43}+4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{43}-4}=\sqrt[3]{43-16}=\sqrt[3]{27}=\underline{\underline{3}}$ ✓

c) $\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}=\sqrt[4]{23-7}=\sqrt[4]{16}=\underline{\underline{2}}$ ✓

d) $\sqrt[5]{\sqrt{35}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{35}-\sqrt{3}}=\cancel{35}=\sqrt[5]{35-3}=\sqrt[5]{32}=\underline{\underline{2}}$ ✓

3) Ist $n\in\mathbb{N}$ und $a,b>0$, so gilt:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

<u>Von links nach rechts gelesen:</u>

Der Quotient zweier Wurzeln mit dem gleichen Wurzelindex ist gleich der gleich hohen Wurzel aus dem Quotienten der beiden Radikanden.

<u>Von rechts nach links gelesen:</u>

Die n-te Wurzel aus einem Quotienten ist gleich dem Quotienten aus den n-ten Wurzeln des Dividenden und des Divisors.

<u>Beweis:</u> Potenziert man beide Seiten der behaupteten Gleichheit mit n, so erhält man links: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$ rechts: $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$

Nach dem Potenzieren können wir also Gleichheit feststellen. Weil es sich um positive Zahlen handelt, müssen diese auch schon vor dem Potenzieren gleich gewesen sein.

Bsp.: $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\frac{64}{2}}=\sqrt[5]{32}=2$ $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}=\frac{6}{5}$

$\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$ weil $(2^4)^3 = 2^{12}$ $\sqrt[4]{3^8} = 9$ $\sqrt[5]{2^{15}} = 8$

~~2)~~ 4) <u>Wurzeln aus einer Potenz</u>

$$⊛\ \sqrt[n]{a^{nk}} = a^k \qquad \sqrt[np]{a^{nk}} = \sqrt[p]{a^k}$$

Radiziert man eine Potenz, so darf man den Exponenten des Radikanden und den Wurzelindex durch dieselbe Zahl dividieren (oder mit derselben Zahl multiplizieren).

<u>Beweis</u>: Um die Gleichheit ⊛ zu beweisen, potenzieren wir beide Seiten mit np.

links $\left(\sqrt[np]{a^{nk}}\right)^{np} = a^{nk}$ rechts: $\left(\sqrt[p]{a^k}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[p]{a^k}\right)^p\right]^n = \left[a^k\right]^n = a^{nk}$

Weil es sich um positive Zahlen handelt, müssen diese schon vor dem Potenzieren gleich gewesen sein.

28/42a) $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{2} = \underline{\underline{\sqrt[4]{8}}}$

$\sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{8}}}$

43d) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{11}}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{a^9}}}$

44, 45, 46

28/44a) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{9}{3}}} = \sqrt{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{3}}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \underline{\sqrt[6]{a}}$ d) $\sqrt[n]{\frac{x}{\sqrt{x}}} = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}}} = \sqrt[n]{\sqrt{x}} = \cancel{\sqrt[n]{x}}\ \underline{\sqrt[2n]{x}}$

45a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \underline{\underline{\sqrt[8]{2}}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}}} = \underline{\sqrt[60]{16}}$ a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[8]{4}\cdot\sqrt[8]{2} = \underline{2}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}}} =$ d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mn}}}} = \underline{\sqrt[mnp]{a^{mn}}} = \underline{\sqrt[p]{a}}$

$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[8]{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{\frac{1}{16}}$

46a) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \underline{\underline{\sqrt[8]{a^7}}}$ b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}$ $\cancel{\sqrt[5]{a}\ \sqrt[3]{a^2}}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[18]{a^2} = \sqrt[18]{a^6}\cdot\sqrt[18]{a^3}\cdot\sqrt[18]{a^2} =$ $\underline{\underline{\sqrt[18]{a^{11}}}}$ ✓

c) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}}} = \sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}}$ $\sqrt[8]{a^2}$ $= \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a} = \underline{\underline{\sqrt[16]{a}}}$ $\sqrt[4]{a^6}$

d) $\sqrt{a^2\sqrt{a\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}}} = \sqrt{a^2\sqrt{a^2}\sqrt[4]{a}}$ $\sqrt{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ $\underline{\sqrt[8]{a^7}}$

46a) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a} = \sqrt[8]{a^4}\cdot\sqrt[8]{a^2}\cdot\sqrt[8]{a} = \underline{\underline{\sqrt[8]{a^7}}}$

46d)

$$\underbrace{\sqrt[4]{a^4}\,\sqrt[4]{a}}$$

$$\sqrt{\sqrt[4]{a^5}} = \sqrt[8]{a^5}$$

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^{16}}\,\sqrt[8]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^{21}}} = \underline{\underline{\sqrt[24]{a^{21}}}} = \underline{\underline{\sqrt[8]{a^7}}}$$

$$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}}} = \sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[12]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[24]{a} = \sqrt[24]{a^{16}}\cdot\sqrt[24]{a^4}\cdot\sqrt[24]{a} =$$

$$\sqrt[24]{a^{21}} = \underline{\underline{\sqrt[8]{a^7}}}$$

47a) $7\sqrt{2\sqrt[3]{4}} - 5\sqrt[3]{4\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{4} - 5\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} =$

$7\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4} - 5\sqrt[6]{16}\cdot\sqrt[6]{2} = 7\cdot\sqrt[6]{32} - 5\sqrt[6]{32} = 7\cdot 2 - 5\cdot 2$

$7\sqrt[6]{32} - 5\sqrt[6]{36} = \underline{\underline{2\sqrt[6]{32}}}$

b) $\sqrt{140\sqrt{7\sqrt{30625}}} = \sqrt{140}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[8]{30625} = \underline{\underline{70}}$

c) $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{3'087'049}}} = \sqrt{7}+\sqrt[4]{7}+\sqrt[8]{3'087'049} =$

5) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}\cdot(a>0,\ n,k\in\mathbb{N})$

Beweis: Wir ~~P~~ potenzieren beide Seiten mit (nk).

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k} = a \qquad \left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk} = a$$

Man radiziert eine Wurzel, indem man die beiden Wurzelindizes miteinander multipliziert