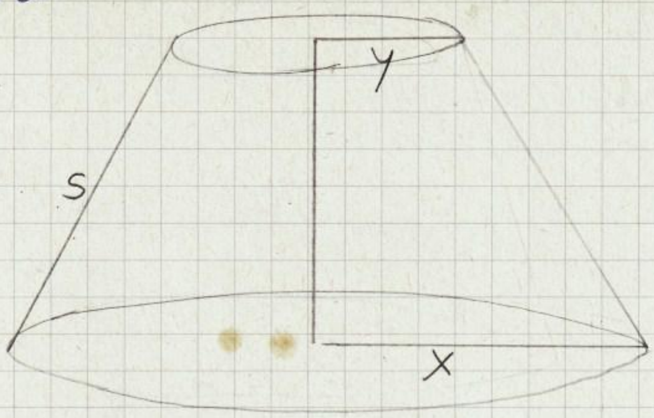
Algebra 6 a MNG IV

mit Contos

122/93)



geg.: $O = 216\pi\ cm^2$

$M = 143\pi\ cm^2$

$s = 13 cm$

ges.: $r_1(x), r_2(y)$

1) $O = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$ $\qquad \cancel{\pi}[x^2+y^2+s(x+y)] = 216\cancel{\pi}$

2) $M = \pi s(r_1 + r_2)$ $\qquad \cancel{\pi} s(x_1 + \cancel{x_2}) = 143\cancel{\pi} \Rightarrow 13(x_1 + y_2) = 143$

$\Rightarrow x_1 + y_2 = 11$

$\Rightarrow x = 11 - y$

1+2) $x^2 + y^2 + 13(x+y) = 216$

$121 - 22y + 2y^2 + 13x + 13y = 216$

$121 - 22y + 2y^2 + 13(11 - \cancel{y} + \cancel{y}) = 216$

$121 - 22y + 2y^2 + 143 = 216$

$2y^2 - 22y + 264 = 216$

$2y^2 - 22y + 48 = 0$

$y_{1/2} = \frac{22 \pm 10}{4} = \frac{11 \pm 5}{2} \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$

$x_{1/2} = 3$ bzw. 8

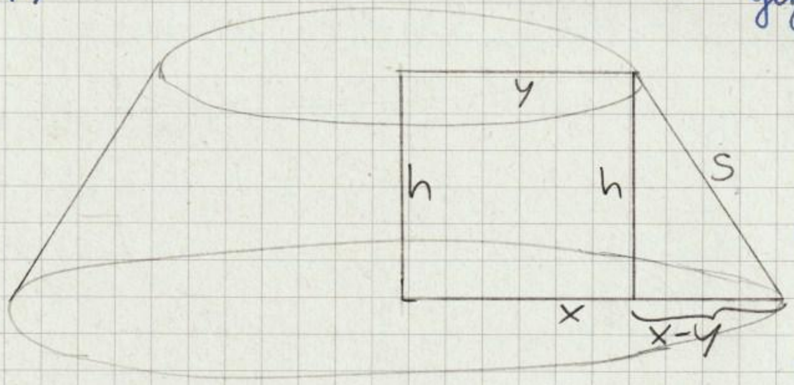
$\underline{\underline{x = 8 cm,\ y = 3 cm}}$

122/94)

geg.: $V = 700\pi\ cm^3$ ges.: $r_1(x), r_2(y)$

$h = 12 cm$

$s = 13 cm$



$V = \frac{h}{3}(G + D + \sqrt{GD})$

$V = \pi\frac{h}{3}(x^2 + y^2 + \sqrt{xy})$

$(x-y)^2 = 169 - 144$

$x - y = 5 \Rightarrow x = 5 + y$

$V = \cancel{\pi}\frac{\cancel{12}^{4}}{3}[(5+y)^2 + y^2 + \sqrt{(5+y)y}] = \cancel{700}^{175}\cancel{\pi}$

$V = 25 + 10y + 2y^2 + 5y + y^2 = 175$

$3y^2 + 15y - 150 = 0$

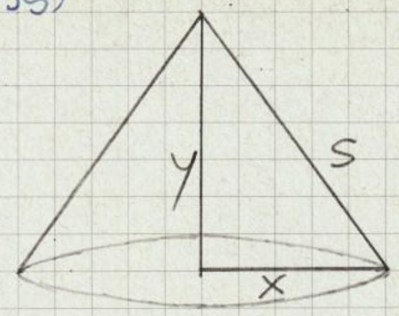
$y^2 + 5y - 50 = 0$

$(y + 10)(y - 5) = 0$

$y = 5$

$x = 10$

122/95)



geg.: $O = 36\pi\, cm^2$ $\quad r = x$

$2r = s+3 \quad 2x = s-3$

$s = 2x+3$

ges.: V, M

auch $h = y$

$3\pi(2x+3)$

$M = \pi s r$

$O = \pi r(r+s) \Rightarrow \cancel{\pi} x(x+2x+3) = 36\cancel{\pi}\, cm$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

$x(3x+3) = 36$

$3x^2+3x-36 = 0$

$x^2+x-12 = 0$

$(x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3$

$x^2+y^2 = (2x+3)^2$

$x^2+y^2 = 4x^2+12x+9$

$\cancel{9}+y^2 = 36+36+\cancel{9}$

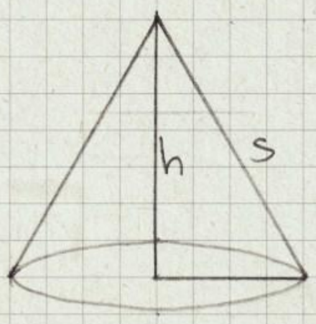
$y = \sqrt{72}$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{\cancel{3}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \sqrt{72} = 3\pi\sqrt{72}$

$\underline{V} = 79.971893\, cm^3 \approx 80\, cm^3$

$\underline{M} = \pi s r = 9\pi \cdot 3 = \underline{27\pi\, cm^2}$

122/97)



geg.: $s-2 = h \quad \frac{4}{5}M = G$ ges.: h, s

$M = \pi r s$

$G = \pi r^2$

$r = \sqrt{s^2-(s-2)^2}$

$\frac{4}{5}\cancel{\pi}\cancel{r} s = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}$

$\frac{4}{5}s = r$

$\frac{4}{5}s = \sqrt{s^2-[s^2-4s+4]}$

$\frac{16}{25}s^2 = \cancel{s^2}-\cancel{s^2}+4s-4$

$\frac{16}{25}s^2-4s+4 = 0$

$s_{1/2} = \frac{4 \pm 2.4}{1.28}$ $\begin{cases} 5 \\ 1.25 \end{cases}$

$\underline{\underline{h_1 = 3\, cm \quad s_1 = 5\, cm}}$

$h_2 = -$

129/49) $x^2-2mx+2m^2+m-6=0$

ursprüngl. Gleichung

$$S=-\frac{b}{a}=\cancel{-\frac{m}{m^2}}=\cancel{-\frac{1}{m}}$$

$$P=\frac{c}{a}=\cancel{\frac{6}{m^2}}$$

$$D=4m^2-4(2m^2+m-6)=0$$

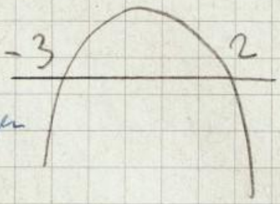
$$D=4m^2-8m^2+4m+24=0$$

$$D=+4m^2+4m-24=0$$

$$m_{1/2}=\frac{-4\ \pm 20}{8}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$$

reelle Lösungen zw. 2 u. -3

$$D=m^2+m-6=0$$



$D>0$ für $-3<m<2$ reelle Lösungen

$D=0$ für $m=-3$ oder $m=2$

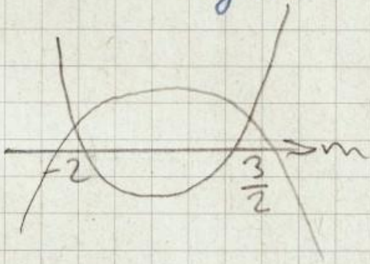
m	
$-\infty<m<3$	keine reelle Lösungen
$m=-3$, $m=2$	zwei gleiche Lösungen. $x_1=x_2=\begin{cases}-3\\2\end{cases}$
$-3<m<-2$	zwei neg. Lösungen
$m=-2$	einsetzen → Gleichung $x^2+4x=0$ $x(x+4)=0$ $x_1=0, x_2=-4$
$-2<m<\frac{3}{2}$	die beiden Lösungen haben verschiedene Vorzeichen.
	$-2<m<0$ ist die neg. Lösung im Betrage größer als die positive
	$0<m<\frac{3}{2}$ ist die pos. Lösung im Betrage größer
	für $m=-2 \vee m=\frac{3}{2}$ ist $\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$
$m=\frac{3}{2}$	für $m=\frac{3}{2}$ $x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0$ $x_1=0, x_2=3$
$m>2$	keine reelle Lösungen

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2m$$

$$x_1\cdot x_2=2m^2+m-6$$

$$m_{1/2}=\frac{-1\pm 7}{4}\begin{cases}\frac{3}{2}\\-2\end{cases}$$

Produkt ist 0, wenn es $\frac{3}{2}$ u. -2 ergibt.



130/50) $x^2+y^2+1=0$

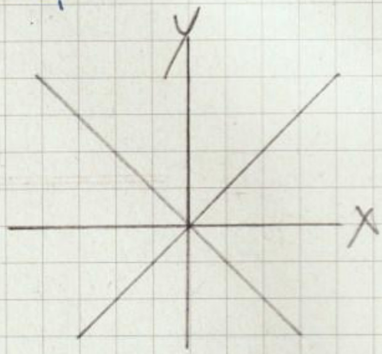
$$x^2=-1-y^2$$
$$x=\pm\sqrt{-1-y^2}$$

$\hookrightarrow$ keine Lösung, da Summe zweier pos. Zahlen nicht neg. sein kann.

$$x^2+y^2=-1$$

130/52) $x^2-y^2=0$

$(x+y)(x-y)=0 \qquad x+y=0 \ \vee \ x-y=0$



130/53) $3x^2+5y^2+2=0$ nicht möglich, da Summe pos. Zahlen nie $=0$

130/54) $x^2+xy+y^2=0$

$$x^2+2xy+y^2=xy$$
$$(x+y)^2 = xy$$

$$\underline{\underline{x=y=0}}$$

siehe Taleskreis, Höhensatz

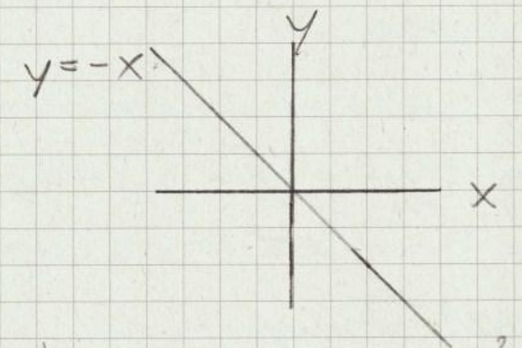
$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$ für $x\neq y \quad x,y>0$

$\frac{(x+y)^2}{4}>xy$

$(x+y)^2>4xy$

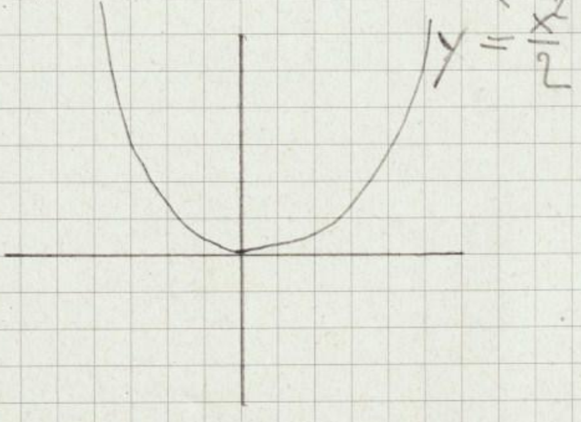
130/55) $x^2+2xy+y^2=0$

$$(x+y)^2=0$$
$$x=-y$$
$$y=-x$$



130/56) $x^2-2y=0$

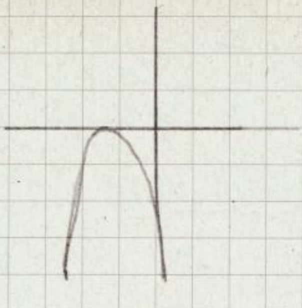
$$x^2=2y$$
$$y=\frac{x^2}{2}$$



130/57) $3x^2+2y=0$

$$2y=-3x^2$$

$$y=-1.5x^2$$



130/58) $y^2-x=0$

$x=y^2$ $\Rightarrow$ liegende Normalparabel

Die Methode der vollständigen Induktion

Wenn eine Aussage A für eine natürliche Zahl n_1 richtig ist, und aus der Tatsache, daß sie für eine Zahl $\in \mathbb{N} = k$ zutrifft, folgt, daß sie auch für $(k+1)$ richtig ist, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen von n_1 an. Ist dies insbesondere $n_1=1$, so gilt die Aussage für alle Zahlen $\in \mathbb{N}$.

Bsp.: Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Beh.: $1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew.: 1) Verankerung: $n_1=1$ $\qquad 1=\frac{1(1+1)}{2}=1$

2) Induktionsbeweis

Vor.: Es sei k eine natürliche Zahl, für welche die Behauptung gilt, also:

$$1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Beh.: Für die nächstgrößere Zahl $\in \mathbb{N}$ $(k+1)$ gilt:

$$1+2+3\dots+k+(k+1)=\underline{\underline{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}$$

Bew.: Nach Voraussetzung kennt man die Summe bis k.

$\Rightarrow$ von 1 bis k gilt $\frac{k(k+1)}{2}$

neu: $\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\underline{\underline{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}$

2. Bsp.: Beh. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

Summe v. i^2, wenn i von 1 – n läuft

Verankerung

links: 1 Rechts: $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$

Induktionsbeweis

Vor.: $k \in \mathbb{N}$ für welche gilt: $1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Beh.: $1^2+2^2+\dots k^2+(k+1)^2 = \underline{\underline{\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}}$ ← $(k+1)$ in die erste Formel einsetzen

Bew.: Summe bis k: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$

$= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6} = \underline{\underline{\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}}$

q.e.d.

$\sum_{i=1}^{5} \sin ix = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x$

$\sum_{i=3}^{5} 3^i = 3+3^2+3^3+3^4$

$\sum_{i=3}^{5} \sqrt[i]{16} = \sqrt[3]{16} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[5]{16}$

Summe der Kubikzahlen

n	$\sum_{i=1}^{n} i^3$				
1	1	1^2	4	100	$(1+2+3+4)^2$
2	9	$(1+2)^2$	5	225	$(1+2+3+4+5)^2$
3	36	$(1+2+3)^2$	6	441	$(1+2+3+4+5+6)^2$

Vermutung: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n}\right)^2$

Die Summe der Kubikzahlen von 1 bis n^3 ist gleich dem Quadrat der Summe der Grundzahlen von 1 bis n.

1) Verankerung: hat schon stattgefunden

2) Induktionsbeweis

Voraussetzung: Es sei k eine Zahl $\in \mathbb{N}$, daß die Summe $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2$

Beh.: $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2$

Die Beh. sagt: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$

Die Vor. heißt: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2$

Beide Seiten $(k+1)^3$ addiert:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4k + 4]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$ q.e.d.

Es sei $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$n = 1 \quad \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$n = 2 \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$

$n = 3 \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$

Vermutung: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$

Verankerung: hat schon stattgefunden

Induktionsbeweis: Vor.: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$

$n \in \mathbb{N}$, für welche die Vermutung gilt.

Beh.: $\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{\text{nach Vor. } \frac{n}{(n+1)}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots (-1)^{n-1} n^2$$

$S_1 = 1$
$S_2 = -3$
$S_3 = 6$
$S_4 = -10$

$$S_n = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: $k \in \mathbb{N}$, für die die Behauptung gilt.

<u>Vor.:</u> $S_k = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$

<u>Beh.:</u> $S_{k+1} = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

<u>Bew.:</u> $(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k \cdot (k+1)^2 = \frac{(-1)^k\left[-1 \cdot k(k+1) + 2(k+1)^2\right]}{2}$

$$= (-1)^k (k+1)\left[\frac{-k+2(k+1)}{2}\right] = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Verankerung: $1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} = 1$

<u>Ind.-Bew.:</u> $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. stimmt.

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

<u>Beh.:</u> $1^2 + 3^2 + \cdots (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)\overset{+2}{(2k+1)}\overset{+2}{(2k+3)}}{3}$

$$k\frac{(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} =$$

$$(2k+1)\left[\frac{(2k-1)k + 3(2k+1)}{3}\right] = \frac{2k+1}{3}\underbrace{\left[2k^2 - k + 6k + 3\right]}_{2k^2+5k+3}$$

$$(2k+3)(k+1)$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Verankerung: $n=1$ $\quad 1+x=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$

Ind.-Bew.: $1+x+x^2+\cdots x^k=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

$k\in\mathbb{N}$, für welche die Beh. stimmt.

Beh.: $\underbrace{1+x+x^2+\cdots+x^k}+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}$

$$\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1+x^{k+1}(x-1)}{x-1}=\frac{\cancel{x^{k+1}}-1+x^{k+2}-\cancel{x^{k+1}}}{x-1}$$

1) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Verankerung: $n=1$ $\quad 1\cdot2=\frac{1(2)(3)}{3}=2$

Ind.-Bew.: $k\in\mathbb{N}$, für welche die Beh. gilt:

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$ Beh.: $1\cdot2+2\cdot3+\cdots(k+1)(k+2)=$

Beh.: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$

Bew.: $=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

2) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Verankerung: $n=1$

$$1\cdot 2\cdot 3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}$$

<u>Ind.-Bew.:</u> $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. gilt.

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Beh.: $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

<u>Beh.:</u> $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+3)(n+1)(n+2)$

<u>Bew.:</u> $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

3) $\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$

<u>Verankerung:</u> $n=1$

$$\cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{\sin(2\alpha+2\alpha)}{4\sin\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{4\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cancel{4\sin\alpha}\cos\alpha}{\cancel{4\sin\alpha}} \Rightarrow \underline{\cos\alpha = \cos\alpha}$$

<u>Ind.-Bew.:</u> $k = \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. gilt

<u>Vor.:</u> $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \cdots \cos 2^k\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}$

<u>Beh.:</u> $\underbrace{\cos\alpha\cos 2\alpha \cdots \cos 2^k\alpha}_{\text{nach Vor.}} \cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$

<u>Bew.:</u> $\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}\cos 2^{k+1}\alpha = \frac{2\cdot\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2\cdot 2^{k+1}\sin\alpha}$ $\quad 2^{k+1} = \varphi$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{2^{k+2}\sin\alpha} = \frac{\sin 2\varphi}{2^{k+2}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$$ q.e.d.

4) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$

Verankerung: $n=1$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{2^2}{1-x^{2^2}} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{1-x^4}$$

Links: $\frac{(1+x^2)+2(1+x)}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1+x^2+2+2x}{(1+x)(1+x^2)} = \underline{\underline{\frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}}}$

Rechts: $\frac{1}{x-1} \quad \frac{4}{-1+x^4} = \frac{x^3+x^2+x+1-4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{x^3+x^2+x-3}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \underline{\underline{\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+1)}}}$

$$
\begin{array}{l}
(x^3+x^2+x-3):(x-1) = x^2+2x+3 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\quad 2x^2+x-3 \\
\quad \underline{-(2x^2-2x)} \\
\qquad 3x-3 \\
\qquad \underline{-(3x-3)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Ind.-Bew.: Vor.: $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. stimmt.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

Beh.: $\underbrace{\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}$

Bew.: $\frac{1}{\cancel{1+x}\; x-1} + \cancel{\frac{2}{1+x^2}} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1} + \cancel{2^{k+1} x^{2^{k+1}}} + 2^{k+1} - \cancel{2^{k+1} x^{2^{k+1}}}}{1-x^{2^{k+2}}}$

$$\underline{\underline{\frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}}}$$

5) $3^{(n+1)(n+2)} - 9$ teilbar für 72

$n=1 \quad 720 : 72 = 10$ = Verankerung

$n=2 \quad 531'432 : 72 = 7381$

Ind.-Bew.:

3

Vor.: $3^{(n+1)(n+2)} - 9 = 72x$

Beh.: $3^{(n+2)(n+3)} - 9 = 72y$ } Diff. auch durch 72 teilbar

$3^{(n^2+3n+2)} - 3^{(n^2+5n+6)} =$

$3^{(n+2)(n+3)}\cancel{-9} - 3^{(n+1)(n+2)}\cancel{+9} =$

$3^{(n+2)}\left[3^{(n+3)} - 3^{(n+1)}\right]$

$3^{(n+1)}\left[3^{2} - 3^{1}\right]$

Vor.: Es sei $k \in \mathbb{N}$ für welche $U = 3^{(k+1)(k+2)} - 9$ durch 72 teilbar ist.

Beh.: $V = 3^{(k+2)(k+3)} - 9$ ist auch teilbar durch 72

Die Beh. stimmt dann, wenn die Diff $V-U$ durch 72 teilbar ist.

$$V - U = 3^{(k+2)(k+3)} \cancel{-9} - 3^{(k+1)(k+2)} \cancel{+9}$$

$$= 3^{(k+2)(k+3)} - 3^{(k+1)(k+2)} = \cancel{3^{(k+2)}\left[3^{(k+3)} - 3^{(k+1)}\right]}$$

$$\left(3^{k+2}\right)^{k+3}$$

$$\cancel{3^{(k+3)} = 3^{(k+1)+2} = 3^{(k+1)} \cdot 3^{2}}$$

$$\Rightarrow \cancel{= 3^{(k+2)}\left[3^{(k+1)} \cdot 3^{2} - 3^{(k+1)}\right] = 3^{(k+2)} 3^{(k+1)}}\left[3^{2} - 1\right]$$

$$= \left(3^{k+2}\right)^{k+3} - \left(3^{k+2}\right)^{k+1} = \left(3^{k+2}\right)^{k+1} \cdot \left(3^{k+2}\right)^{2} - \left(3^{k+2}\right)^{k+1}$$

$$= \underbrace{\left(3^{k+2}\right)^{(k+1)}}_{\text{teilbar durch 9 (wenn k-1)}} \left[\underbrace{\left(3^{k+2}\right)^{2} - 1}_{\text{teilbar durch 8}}\right] \Big\} \Rightarrow \text{Binom } \left(3^{k+2}+1\right)\left(3^{k+2}-1\right)$$

$$\left[\left[3^{2}\right]^{k+2} - 1^{k+2}\right]$$

6) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2}$

Verankerung $n = 1$

$$\sin x = \frac{\sin x}{\cancel{\sin\frac{x}{2}}} \cdot \cancel{\sin\frac{x}{2}}$$

Ind.-Bew.: $k \in \mathbb{N}$, für die die Beh. stimmt.

Vor.: $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{kx}{2}$

Beh.: $\underbrace{\sin x + \sin kx}_{} + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\frac{x}{2}} \sin\frac{(k+1)x}{2}$

Bew.: $\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{kx}{2} + \sin(k+1)x =$

$\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{kx}{2} + 2\sin\frac{k+1}{2}x \cos\frac{k+1}{2}x =$

$\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left[\cancel{\sin\frac{kx}{2}} + \underbrace{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{k+1}{2}x}_{\sin\frac{k+2}{2}x - \cancel{\sin\frac{kx}{2}}}\right] = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{k+2}{2}x$

7) $2^n > 2n+1$

Verankerung: $n=1 \quad 2 \not> 2+1$

$n=2 \quad 4 > 4+1$

$n=3 \quad 8 > 7$

Ind.-Bew.: $k \in \mathbb{N}$, für die die Gleichung gilt.

Vor.: $2^k > 2k+1 \quad |\cdot 2$ (da Vor. sicher richtig) $\rightarrow 2^{k+1} > 4k+2 = 2k+2k+2$

Beh.: $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ $\qquad = 2k + 2(k+1)$

Beh. gesichert

Beh: $2^{k+1} > 2(k+1) + 2k > 2(k+1)+1$ <u>weil $k > 3$</u>

8) $2^n > n^2$

Verankerung: $n=1 \quad 2>1 \qquad n=3 \quad 8 \not> 9 \qquad n=5 \quad 32>25$

$n=2 \quad 4 \not> 4 \qquad n=4 \quad 16 \not> 16 \qquad n=6 \quad 64 > 36$

Ind.-Bew. $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. stimmt. $n>4$

Beh.: Vor.: $2^n > n^2$, wenn $n=1 \wedge n>5$ Vor.: $2^k > k^2 \quad | \cdot 2$

$2^{k+1} > 2k^2$

Beh.: $2^{k+1} > (k+1)^2$

Die Voraussetzung $2^k > k^2$ wird auf beiden Seiten mit 2 multipliziert.

$$2^{k+1} > 2k^2 > k^2+2k+1 \quad \text{wenn} \quad k^2 > 2k+1$$

$$k^2-2k+1 > 2$$

Die Vererbung findet statt für $(k-1)^2 > 2$

9) Suche eine einfache Formel für

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n)^2-1} =$$

$n=1 \quad \frac{1}{3}$

$n=2 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ Vermutung: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

$n=3 \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$

$n=4 \quad \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$

Vor.: $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. gilt

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2k)^2-1} = \frac{k}{2k+1}$$

Beh.: $$\underbrace{\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2k)^2-1}}_{\text{nach Vor.: } \frac{k}{2k+1}} + \frac{1}{(2k+2)^2-1} = \frac{k+1}{2k+3}$$

nach Vor.: $\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+2)^2-1} =$

$$\frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} = \frac{1+k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1+2k^2+3k}{(2k+1)(2k+3)}$$

10) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ durch 133 teilbar

$n=1: \; 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 23 \cdot 133$

$n=2:$

Vor.: $k \in \mathbb{N}$ für welche $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ durch 133 teilbar ist.

Beh.: $11^{k+3} + 12^{2k+3}$ teilbar durch 133

Bew.: $11^{k+3} - 11^{k+2} + 12^{2k+3} - 12^{2k+1}$

$$11^{k+2}(11-1) + 12^{2k+1}(144-1) = 11^{k+2}\cdot 10 + 12^{2k+1}(\underset{144-11}{143}) =$$

$$\cancel{11[11^{k+1}\cdot 10 + 12^{2k+1}\cdot 3]}$$

$$11(11^{k+1}\cdot 10 + 12^{2k+1}\cdot 13) = \cancel{11}(110\cdot 11^k + 156\cdot 12^{2k}) \qquad x$$

11 spielt keine Rolle, man muß nur den Faktor 133 nachweisen

Summe aus Vor. u. Beh. $11^{k+3} + 12^{2k+3} + 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11^{k+2}(11+1) + 12^{2k+1}(144+1)$

$$= 12\cdot 11^{k+2} + 145\cdot 12^{2k+1} = \cancel{12}(\underbrace{11^{k+2} + 145\cdot 12^{2k}}_{121\cdot 11^k + 145\cdot 12^{2k}}) \qquad y$$

$$\begin{array}{l} 110\cdot 11^k + 156\cdot 12^{2k} \\ -121\cdot 11^k + 145\cdot 12^{2k} \\ \hline 11\cdot 12^{2k} - 11\cdot 11^k = 11\cdot(12^{2k} - 11^k) \end{array}$$

Diff. $x - y$

$$(144^k - 11^k) : \underline{(144 - 11)}$$

Plynom 133

Vor.: a teilbar durch 133
Beh.: b " " 133

$$(A - B) - (A + B) = -2B$$

11) Zeige, daß die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender Zahlen durch neun teilbar ist.

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = \text{teilbar durch neun}$$

Verankerung: $n=1$ $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 =$ teilbar durch 9

$n=2 \quad 8 + 27 + 64 = 99 \Rightarrow$ teilbar durch 9

Ind.-Bew.: $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. stimmt.

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \text{teilbar durch } 9 \quad = U$$

Beh.: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = \text{teilbar durch } 9 = V$

Bew.: $V - U$ teilbar durch 9

$(k+3)^3 - k^3$ teilbar durch 9

$$\cancel{k^3} + 9k^2 + 27k + 27 - \cancel{k^3} = \underline{9(k^2 + 3k + 3)} \quad \text{q.e.d.}$$

12) $\alpha > -1,\ \neq 0 \qquad n \in \mathbb{N}$

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$$ <u>Bernoullische Ungleichung</u>

Verankerung: $n = 1 \qquad n = 2$

$$(1+\alpha) \not> 1 + \alpha \qquad 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha \quad \Rightarrow n > 1$$

Ind.-Bew.: Vor.: $k \in \mathbb{N}$, für welche die (Un)gleichung stimmt

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha$$

Beh.: $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha$

Bew.: Vor.: $\Rightarrow (1+\alpha)^{k+1} > (1+\alpha)(1+k\alpha) = 1 + \underbrace{k\alpha + \alpha}_{(k+1)\alpha} + k\alpha^2$

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 > 1 + (k+1)\alpha$$

$$u + uq + uq^2 + uq^3 + \dots + uq^{n-1} = u \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

13) $a \in \mathbb{R} \quad a \neq 1$

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Verankerung: $1 + a = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = 1 + a$

<u>Ind.-Bew.:</u> Vor.: $k \in \mathbb{N}$, für welche die Beh. stimmt

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

Beh.: $\underbrace{1 + a + a^2 + \cdots + a^k} + a^{k+1} = \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1}$

$$\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a-1)a^{k+1}}{a - 1} =$$

$$= \frac{\cancel{a^{k+1}} - 1 + a^{k+2} - \cancel{a^{k+1}}}{a - 1} = \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \quad \text{q.e.d.}$$

14) $a^n - b^n$ ist durch $a - b$ immer teilbar

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$a^{n-1}\left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right] = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n \cancel{+1}} - 1}{\frac{b}{a} - 1} \cdot a^{n-1}$$

letztes Glied: -1

a^{n-1}

15) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n = n!$ Fakultät

$1! = 1$ $\quad 5! = 120$ $\quad 9! = 362880$
$2! = 2$ $\quad 6! = 720$ $\quad 10! = 3628800$
$3! = 6$ $\quad 7! = 5040$
$4! = 24$ $\quad 8! = 40320$

$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n!$ Regel suchen und beweisen.

$S_1 = 1$ $\quad S_5 = 719$ $\quad$ Verm.: $S_n = (n+1)! - 1$

$S_2 = 5$ $\quad S_6 = 5039$

$S_3 = 23$ $\quad S.$

$S_4 = 119$

Ind.-Bew.: $k \in \mathbb{N}$ so, daß die Gleichung stimmt.

Vor.: $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$

Beh.: $\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + k\cdot k!}_{(k+1)! - 1} + (k+1)(k+1)! = k+2! - 1$

$(k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$

$= (k+1)! \underbrace{[1 + (k+1)]}_{k+2} - 1 = (k+1)! \cdot (k+2) - 1 = \underline{\underline{(k+2)! - 1}}$

16)
$$S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$n = 1 \quad S_n = \frac{1}{5}$ +

$n = 2 \quad S_n = \frac{1}{45} + \frac{1}{5} = \frac{2}{9}$

$n = 3 \quad S_n = \frac{1}{117} + \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$

Vermutung: $\frac{n}{4n+1} = S_n$

Vor.: $k \in \mathbb{N}$ für welche die Beh. stimmt

Beh.: $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}$

Beh.: $\underbrace{\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}$

Bew.:
$$\frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k\cancel{(4k+1)}(4k+5) + 1\cancel{(4k+1)}}{(4k+1)^{\cancel{2}}(4k+5)}$$

$$= \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(k+1)\cancel{(4k+1)}}{\cancel{(4k+1)}(4k+5)} \text{ q.e.d.}$$

17)
$$S_n = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} \qquad S_1 = \frac{1}{a(a+h)}$$

$$S_2 = \frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2) + a(a+1)}{(a+1)(a+2)a(a+1)} = \frac{a+(a+2)}{a(a+1)(a+2)} = \frac{2a+2}{a(a+1)(a+2)}$$

$$= \frac{2(a+1)}{a(a+1)(a+2)} = \frac{2}{a(a+2)}$$ für 2 n einsetzen

$\frac{n}{n(n+2)}$

$\underline{\text{Formel} = \frac{n}{a(a+n)}}$

$\cancel{\frac{2}{6}}$ $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$

$\frac{14}{35} + \frac{15}{35}$

Vor.: $k \in \mathbb{N}$, für die die Beh. stimmt.

$$\frac{1}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{k}{a(a+k)}$$

Beh.: $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-k)(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1))} = \frac{k+1}{a(a+k+1)}$

$$\frac{k}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k(a+k+1) + a}{a(a+k+1)(a+k)} = \frac{ak + \cancel{k^2} + k + a}{\cancel{a^2} + k + a} =$$

$$\cancel{\frac{k + k + a}{a(a+k+1)} = \frac{k+1}{}}$$

$$= \frac{ka + k^2 + k + a}{a(a+k)(a+k+1)}$$ dividieren durch $k+a$

$(k^2 + ka + k + a) : (k+a) = k+1$
$\underline{-(k^2+ka)}$
$0 \quad (k+a$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{k+1}{a(a+k+1)}}}$$

Verbesserung S. A. v. 2. 3. 1981

2) k^2+k = immer eine gerade Zahl

Verankerung: $1+1=2$

Ind.-Bew.: Vor.: $k\in\mathbb{N}$ für welche die Beh. stimmt

k^2+k = gerade Zahl U wenn U teilbar durch 2

Beh.: $(k+1)^2+k+1$ = gerade Zahl V wenn V teilbar durch 2

$\Rightarrow$ Diff. auch teilbar durch 2

$$V-U=(k+1)^2+k+1-k^2-k=k^2+2k+1+k+1-k^2-k=2k+2=2(k+1)$$

immer durch 2 teilbar, q.e.d.

4) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]$

$n=1$ $\qquad 1=\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^1\right]=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=1$

Bew.: Vor.: $k\in\mathbb{N}$ für welche gilt:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right]$$

Beh.: $\underbrace{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}}+\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right]$

$$\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right]+\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^k+\frac{5}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}(-4)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}=$$

$$\underline{\underline{\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right]}}$$ q.e.d.

Zahlenfolgen

Ordnet man jeder natürlichen Zahl (oder einer begrenzten Anzahl natürlicher Zahlen) in eindeutiger Weise je einen Zahlenwert zu, so redet man von einer Zahlenfolge. Die den natürlichen Zahlen zugeordneten Zahlenwerte heißen Glieder der Folge. Eine Folge kann nach einer endlichen Anzahl Glieder abbrechen oder unendlich viele Glieder haben.

Die Glieder einer Folge können gewisse Regelmäßigkeiten aufweisen, müssen aber nicht.

Arithmetische Folgen: 2 5 8 11 14 17 20 ...

Regelmäßigkeit : $a_k = a_{k-1} + 3$

$17 \quad 12\frac{1}{2} \quad 8 \quad 3\frac{1}{2} \quad -1 \quad \ldots$

$$a_k = a_{k-1} - \frac{9}{2}$$

Zahlenfolgen, bei denen jedes Glied aus dem vorangegangen durch Addition derselben Konstanten entsteht, heißen arithmetische Folgen. $11 = \frac{8+14}{2}$

allgemein: Bezeichnet man die Differenz aufeinander folgender Glieder mit d, so heißt eine arithmetische Folge:

$$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \quad a_1+3d \quad \cdots \quad a_k = a_1 + (k-1)d$$

Besitzt die Folge eine endliche Anzahl (n) Glieder, so können wir deren Summe berechnen:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 25 \cdot 100$$
$$99 + 97 + 95 + \cdots + 1$$

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + a_1$$
$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n)$$

$$2s_n = n(a_1+a_n) \qquad \boxed{s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}}$$

$d = -5 \qquad 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10$

$a_1 = 20$

$n = 7$

Zu den fünf Größen a_1, n, a_n, d, s_n kennen wir also zwei Beziehungen: 4

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ s_n &= \frac{n(a_1+a_n)}{2} \end{aligned}}$$

Drei von den fünf Bestimmungsstücken sollen also ausreichen, die Folge zu bestimmen.

1) 1817 $a_1 = 2$

$a_n = 156$ $\qquad n = \frac{2s_n}{a_1+a_n} = \frac{2 \cdot 1817}{158}$ $\quad n = 23$

$s_n = 1817$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$

$156 = 2 + 22d$

$\underline{\underline{d}} = \frac{154}{22} = \underline{\underline{7}}$

2) dritte Glied 8, siebte Glied 18 5

Ges.: a_1, d

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_7 = a_1 + 6d$ $\qquad \underline{\underline{a_1 = 3}}$

$4d = 10$

$\underline{\underline{d = 2.5}}$

3)

1. Jahr 15'000 Fr. Ges.: s_n nach 40 Jahren

2. Jahr 15'250 Fr. Während wieviel Jahren steigt das Gehalt?

⋮

max. Gehalt 18'000 Fr.

$a_1 = 15'000$

$a_n = 18'000$

$d = 250$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = a_1 + dn - d$

$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d} = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

$n = 13$

$s = \frac{n(a_1+a_n)}{2} + 27 \cdot a_n = \frac{13 \cdot 33000}{2} + 27 \cdot 18000$

$\underline{\underline{s = 700'500}}$

4) Schulden 12950 Fr. ges.: a_n , n

$a_1 = 600$ Fr.

$d = 50$ Fr.

$$\left| \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \end{array} \right|$$

$$s_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$2s_n = n[2a_1 + (n-1)d]$$

$$25'900 = n[1200 + 50n - 50]$$

$$25900 = 50n^2 + 1150n$$

$$50n^2 + 1150n - 2590 = 0$$

$$n + 23n - 518 = 0$$

$$n_{1/2} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 + 4 \cdot 518}}{2} = \begin{cases} 14 \\ \cancel{-37} \end{cases}$$

$$n = 14$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\underline{a_n} = 600 + 13 \cdot 50 = \underline{\underline{1250}}$$

5) $n = 5$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)d$

$s_n = 20$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$n! = 720 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$$

$$a_3 - 2d, a_3 - d, a_3, a_3 + d, a_3 + 2d$$

$$s_n = 20 \Rightarrow a_3 = 4$$

$$(4-2d) \cdot (4d - d) \cdot 4 \cdot (4+d) \cdot (4+2d) = 720$$

$$(16 - d^2)(16 - 4d^2) = 180$$

$$(16 - d^2)(4 - d^2) = 45)$$

$$d^2 = x$$

$$(16 - x)(4 - x) = 45 \qquad x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 76}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{324}}{2}$$

$$64 - 20x + x^2 = 45 \qquad = \frac{20 \pm 18}{2} \qquad x_{1/2} = \begin{cases} 19 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 20x + 19 = 0$$

$$d^2 = x$$

$$d_{1/2} = \pm 1$$

$$d_{3/4} = \pm\sqrt{19}$$

Prüfung der Resultate:

$d = 1$ $\quad 2, 3, 4, 5, 6$ $\qquad d = \pm\sqrt{19}$ $\quad 4 \mp 2\sqrt{19}, 4 \mp \sqrt{19}, 4, 4 \pm \sqrt{19}, 4 \pm 2\sqrt{19}$

$d = -1$ $\quad 6, 5, 4, 3, 2$

6) $s_n = 10$ Maß $\quad a_n = a_1 + (n-1)d$

$n = 10$

$d = -\frac{1}{8}$ Maß $\quad s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(a_1+a_1+(n-1)d)}{2} = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

ges.: a_n, a_1

$$s_n = \frac{2na_1 + nd(n-1)}{2}$$

$$2s_n = 2na_1 + nd(n-1)$$

$$a_1 = \frac{2s_n - nd(n-1)}{2n} = \frac{s_n}{n} - \frac{nd(n-1)}{2n} = \frac{20 - 10\cdot\frac{1}{8}(9)}{20}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 0.4375 \text{ Maß}}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 0.4375 + 9\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = 1.5625$$

$$\underline{\underline{a_n = 1.5625 \text{ Maß}}}$$

Geometrische Folgen (Aufgabenblätter siehe vorne)

Zahlenfolgen, bei welchen der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, nennen wir geometrische Folgen.

Aus $\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$ folgt: $a_k = q \cdot a_{k-1}$

weiter $a_2 = a_1 \cdot q \quad a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 q)\cdot q = a_1 q^2$

$$a_4 = a_1 q^3 \quad \dots \quad \boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_n$

$a_1 \quad a_1 q \quad a_1 q^2 \quad a_1 q^3 \quad \dots \quad a_1 q^{n-1}$

Summenformel

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \qquad a_1$$

$$q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \qquad q$$

n

$$S_1 - q S_n = a_1 - a_1 q^n \qquad \boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}} \qquad a_n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

S_n

10) 10 Möglichkeiten

a) bekannt a_1, q, n

$a_1 = 2 \quad q = \frac{1}{2} \quad n = 6$

$S_6 = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{}$

$a_6 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$

$S_6 = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]$

$S_6 = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3\frac{15}{16}$

23) $a_1 = 1$ Ges.: q
$n = 20$
$a_n = 2$

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$

$\lg\frac{a_n}{a_1} = (n-1)\lg q$

$\lg q = \frac{\lg\frac{a_n}{a_1}}{(n-1)}$

$\underline{\underline{q = 1.0371550437}}$

$n = 160 \quad a_n = a_1 q^{n-1}$

$a_n = 330.47817782$

$\underline{\underline{\approx 330.45 \text{ Fr.}}}$

---

22) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$\underline{\underline{a_1}} = \frac{q^{n-1}}{a_n} = \frac{262'144}{262'144} = \underline{\underline{1}}$ $\quad \underline{\underline{S_n}} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{-2^{19}-1}{-3} = \underline{\underline{174763}}$

17–21

17) $a_1 = \frac{1}{64}, q = 4, n = 11$ $\quad a_n = a_1 q^{n-1}$ $\quad \underline{\underline{a_n}} = \frac{1}{64} \cdot 4^{10} = 4^{-3} \cdot 4^{10} = 4^7 = \underline{\underline{16384}}$

$\underline{\underline{S_n}} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = 16384 \frac{4^{11}-1}{10} = \underline{\underline{6.871946 0989 \cdot 10^9}}$

18) $a_1 = 5, q = -2, n = 8$

$a_n = a_1 q^{n-1}$ $\quad \underline{\underline{a_n}} = 5(-2)^7 = \underline{\underline{-640}}$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = 5 \frac{-2^8 - 1}{7} = \frac{1275}{7}$

$\underline{\underline{S_n = 182\frac{1}{7}}}$

19) $a_1 = -\frac{2}{3}, q = -\frac{1}{2}, n = 7$

$\underline{\underline{a_n}} = a_1 q^{n-1} = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = -0.0104 1667 = \underline{\underline{-\frac{1}{256}}}$

$\underline{\underline{S_n}} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = -\frac{2}{3} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{-1\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-0.4479 1667}}$

20) $a_7 = 256, q = 4, n = 7$

$a_n = 256$ $\quad \underline{\underline{a_n}} = a_1 q^{n-1}$ $\quad a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}} = \frac{256}{4^6} = \frac{4^4}{4^6} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$ ✓

$\underline{\underline{S_n}} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4^7 - 1}{3} = 341.3125 = \underline{\underline{341\frac{15}{48}}}$ ✓

21) $a_6 = 3125$, $q = 2\frac{1}{2}$, $n = 6$

$a_n = 3125$ $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad \underline{\underline{a_1}} = \frac{a_n}{q^{n-1}} = \frac{3125}{2.5^5} = \frac{5^5}{2.5^5} = 2^5 = \underline{\underline{32}}$ √

$\underline{\underline{S_n}} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = 32 \frac{2.5^6 - 1}{1.5} = \underline{\underline{5187}}$ √

---

24) $a_1 + 5a_1 + 25a_1 + 125a_1 + 625a_1$ $\quad a_n = 1562$ $n = 5$ $q = 5$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

$a_1 = \frac{S_n}{\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)} = \frac{1562}{\left(\frac{3124}{4}\right)} = 2$ $\quad$ Folge: 2, 10, 50, 250, 1250

---

25) $xa_1 - a_1 = 12$ $\quad x = q$ $\quad a_1(x-1) = 12$ | : $\quad a(\pm 5 - 1) = 12$

$x^3 a_1 - x^2 a_1 = 300$ $\quad a_1(x^3 - x^2) = 300$ $\quad$ 1) $4a = 12$ $a = 3$

$a_1 x^2 (x-1) = 300$ | : $\quad$ 2) $-6a = 12$ $a = -2$

$x^2 = 25$

$x_{1/2} = +/-5$

	a	aq	aq^2	aq^3
1)	q 5	15	75	375
2)	q -5	10	-50	250

---

26) $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26$ $\quad$ ~~$a_1(1 + q + q^2) = 26$~~

$a_1 q^4 + a_1 q^5 + a_1 q^6 = 2106$ $\quad$ ~~$a_1(q^4 + q^5 + q^6) = 2106$~~ | :

$q^4 (a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 2106$

$q^4 = 81$

$\underline{q_{1/2} = +/-3}$ $\quad \underline{q_{3/4} = +/- 3i}$

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26$

$q = 3 \Rightarrow a = 2$ $\quad q = 3i$ $\quad a_1(1 + 3i - 9) = 26$

$q = -3 \Rightarrow a = 3\frac{5}{7}$

$a = \frac{26}{-8+3i} \cdot \frac{-8 - 3i}{-8 - 3i} = \frac{-208 - 78i}{73}$

$\underline{\underline{= -\frac{208}{73} - \frac{78}{73} i}}$

$a = -3i$ $\quad \underline{\underline{a = -\frac{208}{73} + \frac{78}{73} i}}$

27) $a_n = 104$ $n = 3$ ges.: q $\underline{\underline{q = 1.6124515}}$

$a_n - a_1 = 64$

$104 - a_1 = 64$

$a_1 = 40$

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$\lg \frac{a_n}{a_1} = (n-1) \lg q$

$\lg q = \frac{\lg \frac{a_n}{a_1}}{(n-1)}$

$a_1 = 40$

$a_2 = 64.498062$

$a_n = 104$

---

28) $a_1 = 4$

$a_n = 26244$

$s_n = 39364$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$

$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$

$S_n = a_1 \frac{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} - 1}{\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} - 1} \Rightarrow$

$q = \frac{a_1 - s_n}{a_n - s_n}$

$$\left[\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]^n = \underbrace{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{n-1 \text{ Faktoren}} \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{a_n}{a_1} \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$4 \frac{6561 \cdot x - 1}{x - 1} = \cancel{9841}\ 39364 \quad |:4$

$6561 x - 1 = 9841 x - 9841$

$3280 x = 9840$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = 3$

$\sqrt[n-1]{6561} = 3$

$\frac{1}{n-1} \lg 6561 = \lg 3$

$n = \frac{\lg 6561}{\lg 3} + 1$

$\underline{\underline{n = 9}}$

$\underline{\underline{q = 3}}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$q^{n-1} = \frac{q^n}{q}$

$a_n = a_1 \frac{q^n}{q}$

$a_n q = a_1 q^n$ | +

$S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1$ | −

$a_n q - S_n(q-1) = a_1$

$q = \frac{a_1 - S_n}{a_n - S_n}$

29) $S_n = 93$ $\quad \frac{a}{q} + a + aq = 93$ $\quad 3\,15 \quad 75$

$\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 3375$

$\Rightarrow a^3 = 3375 \quad a = 15$

$\frac{15}{q} + 15 + q15 = 93$

$\frac{15}{q} + 15q = 78$

$\frac{15 + 15q^2}{q} = 78$

$15 + 15q^2 = 78q$

$15q^2 - 78q + 15 = 0$

$5q^2 - 26q + 5 = 0$

$q_{1/2} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4\cdot 5\cdot 5}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10} = \begin{cases} 5 \\ \frac{1}{5} \end{cases}$

30) $a; a+\sqrt{2}; a+2\sqrt{2}$

$a^2; (a+\sqrt{2})^2; (a+2\sqrt{2})^2$ $\qquad \frac{(a+2\sqrt{2})^2}{a^2} = \frac{(a+2\sqrt{2})^2}{(a+\sqrt{2})^2}$

$(a+\sqrt{2})^4 = a^2(a+2\sqrt{2})^2$

$(a+\sqrt{2})^2 = \pm a(a+2\sqrt{2})$

$a^2 + 2\sqrt{2}a + 2 = a^2 + 2\sqrt{2}a$

$\underline{2 \neq 0}$

$1-\sqrt{2} \;;\; 1 \;;\; 1+\sqrt{2}$

$3-2\sqrt{2} \quad 1 \quad 3+2\sqrt{2}$

$a^2 + 2\sqrt{2}a + 2 = -a^2 - 2\sqrt{2}a$

$9-8$

$2a^2 + 4\sqrt{2}a + 2 = 0$

$-1-\sqrt{2} \;;\; -1 \;;\; -1+\sqrt{2}$

$a^2 + 2\sqrt{2}a + 1 = 0$

$3+2\sqrt{2} \quad 1 \quad 3-2\sqrt{2}$

$a_{1/2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{4}}{2} = \underline{\underline{-\sqrt{2} \pm 1}}$

31) $a_1 = 1$ $\quad 1 \quad \sqrt[11]{3}\,;\ \sqrt[11]{9}\,;\ (\sqrt[11]{3})^3\,;\ (\sqrt[11]{3})^4 \quad 3$

$a_n = 3$

$n = 12$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_{12} = a_1 q^{11}$$
$$q^{11} = \frac{a_{12}}{a_1} \qquad q^{11} = 3$$
$$q = \sqrt[11]{3}$$

32) $q = \sqrt{2}$ da $\sqrt{1 \cdot 2}$

33) $a_1 = 16$ Ges.: q, n

$a_n = 81$

$S_n = 211$

$a_n = a_1 \frac{q^n}{q} \qquad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ 16

I $\quad q a_n = q^n a_1 \quad | + S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1$

II $\quad S_n(q-1) = q^n a_1 - a_1 \quad | -$

$q a_n - S_n(q-1) = a_1$

$q a_n - S_n q + S_n = a_1$

$q(a_n - S_n) = a_1 - S_n$

$\underline{\underline{q}} = \frac{a_1 - S_n}{a_n - S_n} = \underline{\underline{1.5}}$

$a_n = a_1 q^{n-1}$ 81

$\lg \frac{a_n}{a_1} = (n-1) \lg q$

$\underline{\underline{n}} = \frac{\lg \frac{a_n}{a_1}}{\lg q} + 1 = \underline{\underline{5}}$

34) $n = 7$

$$\underbrace{a;\ aq;\ aq^2;\ aq^3;\ aq^4;\ aq^5}_{157.5};\ aq^6$$
$$a;\ \underbrace{aq;\ aq^2;\ aq^3;\ aq^4;\ aq^5;\ aq^6}_{315}$$

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 = 157.5$$
$$aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7 = 315$$
$$q(a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6) = 315$$
$$q = 2$$
$$a_1(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 157.5$$
$$a = 2.5$$

59) $\frac{a}{q^2};\ \frac{a}{q};\ a;\ aq;\ aq^2 \qquad \frac{a}{\cancel{q^2}} \cdot \frac{a}{\cancel{q}} \cdot a \cdot a\cancel{q} \cdot a\cancel{q^2} = 2^{15} \qquad \underline{\underline{a^5 = \sqrt[5]{2^{15}} = 8}}$

$a = 8$

$S_n = 62$

$n = 5$

$$\frac{8}{q^2} + \frac{8}{q} + 8 + 8q + 8q^2 = 62$$
$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = \frac{31}{4} \rightarrow q = 2$$

<u>Folge: 2, 4, 8, 16, 32</u>

67) $n=4$

$S_n=360°$

$4a_1=a_n$

$\frac{a_1}{q}+a_1+a_1q+a_1q^2=360°$

$a_n=\frac{a_1}{q}q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot\frac{q^n}{q}=a_1q^{n-2}$

$4a_1=a_n \quad a_n=\frac{a_n}{4}q^{n-2}$

$4\cancel{a_n}=\cancel{a_n}q^{n-2}$

$\lg 4=(n-2)\lg q$

$\lg q=\frac{\lg 4}{2}$

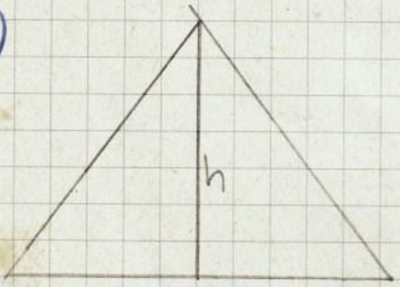
$q=2$

$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

$a_1=\frac{S_n(q-1)}{q^n-1}=\frac{360°}{15}=24°$

Folge: $24°, 48°, 96°, 192°$

68)



$h=\frac{s}{2}\sqrt{3} \quad s=20cm$

$n=4$

$73.07 cm^2$

$13 cm$

66) a_1, a_1q, a_1q^2

a_1q, a_1q^2, a_1q^2+d

$d=a_1q^2-a_1q$

$a_1+a_1q^2+d=8$

$a_1q+a_1q^2=6$

$a_1=\frac{6}{q(1+q)}$

$a_1+a_1q^2+a_1q^2-a_1q=8$

$a_1(1+q+2q^2)=8$

$a_1=\frac{8}{(1-q+2q^2)}$

$\frac{6}{q(1+q)}=\frac{8}{1-q+2q^2}$

$6-6q+12q^2=8q+8q^2$

$4q^2-14q+6=0$

$2q^2-7q+3=0$

$q_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\begin{cases}3\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

$a_{1_1}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$a_{1_2}=\frac{6}{0.75}=8$

Folge$_1$ $=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$

~~Folge$_2$ $=8, 24, 72$~~

~~$24, 72, 110$~~

59) $\frac{a}{q^2}$ $\frac{a}{q}$ a aq aq^2

$a=8$

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1+q+q^2=\frac{31}{4} \quad |+1$$

$$x=q+\frac{1}{q} \qquad x^2=x^2+2+\frac{1}{q^2}$$

$$x^2+x-\frac{35}{4}=0 \qquad x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+35}}{2}=\frac{-1\pm6}{2}=\begin{cases}\frac{5}{2}\\-\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \wedge q+\frac{1}{q}=-\frac{7}{2} \qquad 2q^2+7q+2=0$$

$$2q^2-\frac{5}{2}q+2=0$$

$$q_{3/4}=\frac{-7\pm\sqrt{49-16}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$q_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}=\begin{cases}2\\\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$q_3=\frac{-7+\sqrt{33}}{4}$$

$$q_4=\frac{-7-\sqrt{33}}{4}$$

$q=2:\ 2,4,8,16,32$ → dasselbe

$q=\frac{1}{2}: 32,16,8,4,2$

$$q_3: \frac{128}{(-7+\sqrt{33})^2}, \frac{32}{-7+\sqrt{33}}, 8, (-14+2\sqrt{33}), \frac{(-7+\sqrt{33})^2}{2}=\frac{82-14\sqrt{231}}{2}=41-7\sqrt{231}$$

$q_4=q_3$

60) $S_n=3$ $\qquad u+v+w=3 \qquad v\ w\ u$

$$w-v=v-u$$

$$w=2v-u$$

$$\frac{u}{w}=\frac{w}{v} \qquad \cancel{u}+v+2v-\cancel{u}=3$$

$$3v=3$$

$$\underline{v=1}$$

$$u+1+w=3$$

$$u+w=2 \qquad w=2v-u$$

$$u+2v-u=2 \qquad w^2=uv=u \qquad u=2v-w=2-w$$

$$u-u=$$

$$w^2=2-w$$

$$u+w=2 \qquad w^2+w-2=0 \qquad \underline{w_{1/2}}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

$u_1=1$

$u_2=4$

Folge$_1$: 1, 1, 1

$_2$: 4, 1, −2

$_3$: 1, −2, 4

62) a, aq, aq^2 geom.

$a \quad aq+4 \quad aq^2$ arithm.

$\Rightarrow \frac{a+aq^2}{2} = aq+4$

$a+aq^2-2aq = 8$

$a = \frac{8}{1+q^2-2q}$

$a \quad aq+4 \quad aq^2+32$ geom.

$\longrightarrow a(aq^2+32) = (aq+4)^2$

$\cancel{a^2q^2} + 32a = \cancel{a^2q^2} + 8aq + 16$

$32a - 8aq = 16$

$a = \frac{16}{32-8q} = \frac{2}{4-q}$

$\frac{2}{4-q} = \frac{8}{1+q^2-2q}$

$2(1+q^2-2q) = 8(4-q)$

$2+2q^2-4q = 32-8q$

$2q^2+4q-30 = 0$

$q_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+240}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{276}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{69}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{2}$

$\frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{4} = \frac{-4 \pm 16}{4} = -1 \pm 4$

$q_1 = 3$
$q_2 = -5$

$a = \frac{2}{4-q}$ $\quad a_1 = 2$
$a_2 = -2$

61) $a; aq; aq^2; aq^3$

$a(1+q^3) = 195$

$aq + aq^2 = 60$

$a(q+q^2) = 60$

$(1+q^3) : (q+q^2) = 3\frac{1}{4}$

$\frac{1+q^3}{q(1+q)} = 3\frac{1}{4}$

$\frac{1-q+q^2}{q} = \frac{13}{4} \quad | \cdot 4q$

$(1-q+q^2)\cdot(1+q)$

$1-q+q^2$

$q-q^2+q^3$

$4-4q+4q^2 = 13q$

$4q^2-17q+4 = 0$

$q_{1/2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2-64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$

$a_1 = 3, 12, 48, 192$

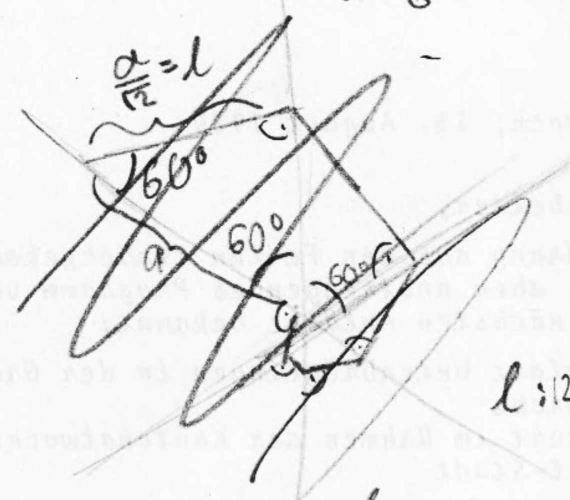
$a_2 = 192, \ldots$

(69) $a = 15\,cm$ $\quad l = \frac{a}{12}$

$n = 6$

$l = a \cdot \cos 60^\circ = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$

$\cos\alpha = \frac{l}{a} \quad l = a \cdot \cos\alpha$



$q = \frac{1}{2}$

$a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{8}a, \frac{1}{16}a, \frac{1}{32}a$

l: 12.990381, 6.5, 3.25, 1.62, 0.81, 0.4,

Summe aller Lote: 25.574813 cm