Michael Schulz
Nonnenweg 7
4055 Basel

Rechnen - Algebra

7a MNG

mit Contos

Algebra 7a MNG I

mit Contos

Michael Schulz   Rechnen-Algebra 7a I MNG

Fortsetzung Geometrische Folgen

Angewandte Aufgaben

70) $a_1 = 20\,l$ $x = 10$

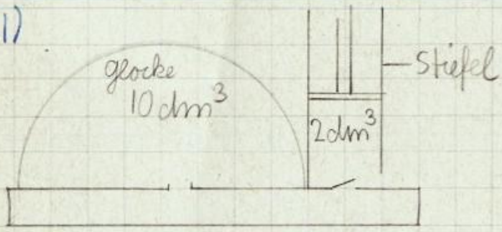
$a_2 = 20\,l \cdot 0.95$

$a_3 = (20\,l \cdot 0.95) \cdot 0.95$

nach x-maligem Schöpfen $a_{x+1} = 20 \cdot 0.95^x$

$\underline{a_{11}} = 20 \cdot 0.95^{10}\,l = 11.974739\,l \approx \underline{\underline{11.97\,l}}$

71)



nach 1. Kolbenzug sind noch $\frac{4}{5}$ der ursprünglichen Luft vorhanden.

$a_1 = 10\,dm^3$

$a_2 = 10 \cdot 0.8\,dm^3$

$a_3 = (10 \cdot 0.8) \cdot 0.8\,dm^3$

$a_{x+1} = 10 \cdot 0.8^x$

$\cancel{10} \cdot 0.8^x = \frac{\cancel{10}}{1000}$

$x \lg 0.8 = -3$

$\underline{\underline{x}} = \frac{-3}{\lg 0.8} = 30.95655347 \approx \underline{\underline{31}}$

72) a) $10 \cdot 2,\ 10 \cdot 2^2,\ 10 \cdot 2^3, \dots, 10 \cdot 2^{24}$ $a_n = 1.67772161510^8$

$\underline{\underline{1.677721615 \cdot 10^8}}$

b) $r = \frac{1}{200}\,mm$ $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{200^3}\,mm^3$

$1000\,mm^3 : \left(\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{200^3}\right) mm^3 = 2^x \cdot 10 \quad \frac{1000}{\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{200^3}} = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 200^3}{4\pi} = 2^x \cdot \cancel{10}$

$\lg \frac{3 \cdot 100 \cdot 200^3}{4\pi} = x \lg 2$

$\underline{\underline{x}} = \frac{\lg \frac{300 \cdot 200^3}{4\pi}}{\lg 2} = \frac{\lg \frac{75 \cdot 200^3}{\pi}}{\lg 2} = \frac{\lg 75 \cdot 200^3 - \lg \pi}{\lg 2} = 27.508891\ \text{Std.}$

$\underline{\approx 27.5\ \text{Std.}}$

63) a_1, a_2, a_3, a_4

$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$

$$\left| \begin{array}{l} a_1q = a_1 + 4 \\ a_1q^3 = a_1q^2 + 36 \end{array} \right|$$

$a_1(q-1) = 4 \qquad a_1 = \frac{4}{q-1}$

$a_1q(q^2-q) = 36 \qquad a_1 = \frac{36}{q^2(q-1)}$

$\frac{4}{q-1} = \frac{36}{q^2(q-1)} \quad | \cdot q^2(q-1)$

$4q^2 = 36$

$q^2 = 9 \qquad q_1 = 3 \quad a_1 = 2$

$\qquad\qquad q_2 = -3 \quad a_2 = -1$

Folgen: 1) $2, 6, 18, 54$

2) $-1, 3, -9, 27$

---

65) $a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = 484 \quad | +$

$aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = 120 \quad | -$

$a + aq^2 + aq^4 = 364 \qquad q^2 = x$

$a + ax + ax^2 = 364$

$x_{1/2} =$

$a(q+q^3) = 120 \qquad a = \frac{120}{q+q^3}$

$a(1+q^2+q^4) = 364$

$\frac{120}{q+q^3}(1+q^2+q^4) = 364 \quad | :4 \quad | \cdot (q+q^3)$

$30(1+q^2+q^4) = 91(q+q^3)$

$30 + 30q^2 + 30q^4 - 91q - 91q^3 = 0$

$30q^4 - 91q^3 + 30q^2 - 91q + 30 = 0 \quad | : q^2$

$\underbrace{30q^2 - 91q + 30 - \frac{91}{q}}_{-91(q+\frac{1}{q})} + \frac{30}{q^2} = 0 \quad | +30$

$30q^2 - 91q + 60 - \frac{91}{q} + \frac{30}{q^2} = 30$

$-91(q+\frac{1}{q}) + 30(q^2 + 2 + \frac{1}{q^2}) = 30 \qquad (q+\frac{1}{q}) = x$

$30x^2 - 91x - 30 = 0$

$x_{1/2} = \frac{91 \pm \sqrt{91^2 + 30 \cdot 120}}{60} = \frac{91 \pm 109}{60} = \begin{cases} 3\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} \end{cases}$

$q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3}$

$3q^2 - 10q + 3 = 0$

$q_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$

$\underline{q_{1/2} = 3, \ \frac{1}{3}}$

$q + \frac{1}{q} = -\frac{3}{10}$

$10q^2 + 3q + 10 = 0$

$q_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-400}}{20} = \frac{-3 \pm \sqrt{-391}}{20}$

$= \frac{-3 \pm i\sqrt{391}}{20}$

$q=3$ $\quad a=\frac{120}{q+q^3}$ $\quad a=\frac{120}{30}=4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
4	12	36	108	324
324	108	36	12	4

$q=\frac{1}{3}$ $\quad a=\frac{120}{\frac{10}{27}}=$

---

66) $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$a \quad + aq \quad + aq^2 \quad + aq^2+d$

$x \quad y \quad z \quad u$

$a_1+a_4=8$

$a_2+a_3=6$

1) $\frac{z}{y}=\frac{y}{x}$

2) $u-z=z-y$

3) $u+x=8$

4) $z+y=6$ $\Rightarrow z=6-y$

4 in 2 $u-6+y=6-2y$

$u=12-3y$ in 3

$12-3y+x=8$

$x=-4+3y$ in 1)

$(6-y)(3y-4)=y^2$

$18y-24-3y^2+4y-y^2=0$

$-4y^2+22y-24=0$

$2y^2-11y+12=0$

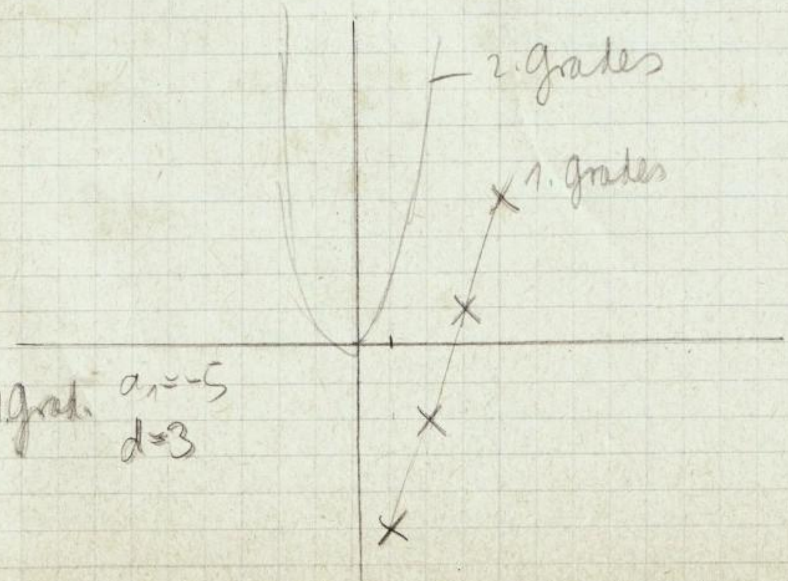
$y_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{4}=\frac{11\pm5}{4}=\begin{cases}4\\ 1\frac{1}{2}\end{cases}$

Arithmetische Folgen höherer Ordnung

1 $\quad$ 4 $\quad$ 9 $\quad$ 16 $\quad$ 25 $\quad$ 36 arithm. Folge 2. Ordnung

3 $\quad$ 5 $\quad$ 7 $\quad$ 9 $\quad$ 11

2 $\quad$ 2 $\quad$ 2 $\quad$ 2



1. Grad. $a_1=-5$
$d=3$

7/9) a) $2+5+8+\cdots+56$

$a_1=2 \quad a_n=56$ $\qquad a_n=a_1+d(n-1) \qquad \underline{\underline{n}}=\frac{a_n-a_1}{d}+1 = \underline{\underline{19}}$

$d=3 \qquad s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \qquad \underline{\underline{S_n}}=\frac{19\cdot 58}{2}=\underline{\underline{551}}$

7/10) $4,\ 8,\ 12 \ldots$

$a_1=4$

$d=4 \qquad s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \qquad n=\frac{2s_n}{(a_1+a_n)}$

$s_n=1200 \qquad a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n=a_1+\left(\frac{2s_n}{a_1+a_n}-1\right)d$

$\cancel{a_n=a_1+\frac{2s_nd}{a_1+a_n}-d}$

$\cancel{a_n(a_1+a_n)}=a_1+2s_nd-d$

$a_na_1+a_n^2=a_1+2s_nd-d \qquad a_{n1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+38400}}{2}=\frac{-4\pm196}{2}=-2\pm98 \begin{cases}\cancel{-100}\\96\end{cases}$

$a_n^2+a_na_1-(a_1+2s_nd-d)=0$

$a_n^2+4a_n-9600=0 \qquad a_n=a_1+(n-1)d=a_1+nd-d \qquad n=\frac{a_n-a_1+d}{d}=\underline{\underline{24}}$

$nd=a_n-a_1+d$

---

13 a) $1+(n-1)6 > 10000$

$a_1+(n-1)d > 10000$ ($\uparrow a_n$) $\qquad$ n ist mindestens 1668

$(n-1)6 > 9999 \qquad \underline{\underline{n>1668}}$

$6n-6 > 9999$

$6n > 10005$

$n > 1667.5$

b) $a_n=a_1+(n-1)d$

$100+(n-1)\cdot12 < -1000 \qquad \underline{\underline{n>92\frac{2}{3}}}$

$-(n-1)\cdot12 < -1100$

$12n-12 > 1100$

$12n > 1112$

$n > 92.\overline{6}\ldots$

8/22,23

22a) $n = 24 = 2\cdot 12$ $\quad \underline{\underline{2s_n}} = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{\cancel{2}\cdot 12(2+13)}{\cancel{2}} = \underline{\underline{180}}$

$a_1 = 2$

$a_n = 13$

---

b) $n = 2\cdot 12$ $\quad \underline{\underline{s_n}} = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{\cancel{2}\cdot 12(11+22)}{\cancel{2}} = \underline{\underline{396}}$

$a_1 = 11$

$a_n = 22$

---

23) $4.9 \quad 4.9+9.8m \quad 4.9+2\cdot 9.8m \quad 4.9+3\cdot 9.8m \quad \ldots$

a) $n=7$ $\quad \underline{\underline{a_n}} = a_1+(n-1)d = \underline{\underline{63.76\,m}}$

$a_1 = 4.9$

$d = 9.81m$

b) $s_n = ?$

$\underline{\underline{s_n}} = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{7(4.9+63.76m)}{2} = \underline{\underline{240.31m}}$

c) $a_n = a_1+(n-1)d$ $\quad$ d) $s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

Nichtabbrechende geom. Folgen

Die Summe der ersten n Glieder einer geom. Folge beträgt:

$$s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= a_1\left[\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right] = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

↳ strebt gg 0, wenn $q<1$

$q^n = (q^{n-1})q \quad q<1 \Rightarrow$ Beträge werden immer kleiner da mit 0, . . . multipliziert

Ist der Betrag von $q<1$, so wird hier der zweite Teil der Summe $\frac{a_1q^n}{1-q}$ immer kleiner, je größer n wird. Dies ist der Fall, weil die Potenzen von q immer kleiner werden. Ist $|q|<1$, so gibt es keine noch so kleine positive Zahl, welche von q^n nicht unterschritten würde, wenn nur n groß genug gewählt wird.

Bsp.: Es sei $q=0.9$. Von welchem n an wird $q^n < \frac{1}{10^6}$?

$$0.9^n < 10^{-6}$$

$$n \lg 0.9 < -6$$

$$n > \frac{-6}{\lg 0.9} \approx 131.1$$

Von $n=132$ an wird $0.9^n < \frac{1}{10^6}$

Allgemein: Ist $|q| < 1$, so gibt es zu jeder noch so kleinen pos. Zahl ε ein n_ε derart, daß $|q^n| > \varepsilon$, sobald $n > n_\varepsilon$
└ Schwellenzahl.

Beweis: Wir zeigen, daß man zu jedem $\varepsilon > 0$ diese Schwellenzahl n_ε berechnen kann.

$$|q^n| < \varepsilon$$

Beschränken wir uns auf pos. q-Werte, so ist:

$q^n < \varepsilon$

$n \lg q < \lg \varepsilon$ wenn $n<0$: $n \lg |q| < \lg \varepsilon$

$n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg q}$ $\qquad n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$

Bsp.: $0.555\ldots$ $\quad s = \dfrac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{5}{\cancel{10}} \cdot \dfrac{\cancel{10}}{9} = \dfrac{5}{9}$

24/11a) $s = \dfrac{a_1 q^n}{1-q}$

$a_1 = 1$, $q = \frac{1}{4}$ $\quad s = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{4}$

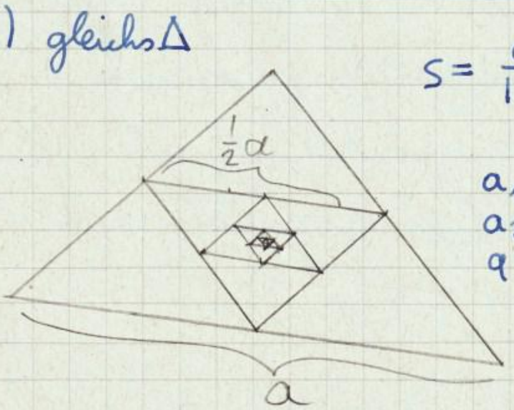
b) $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{4}$ $\quad s = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

c) $a_1 = 1$ $q = -\frac{1}{4}$ $\quad s = \dfrac{1}{1\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad$ d) $a_1 = 1$ $q = -\frac{3}{4}$ $\quad s = \dfrac{1}{\frac{7}{4}} = \dfrac{4}{7}$

24/12a) $a_1 = 1$ $q = \frac{5}{6}$ $\quad s = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ $\qquad$ b) ~~a_1~~ $q = \frac{2}{3}$ $\quad s = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$

c) $a_1 = 1$ $q = -\frac{2}{5}$ $\quad s = \dfrac{1}{\frac{7}{5}} = \dfrac{5}{7}$ $\qquad$ d) $a_1 = 1$ $q = \frac{4}{5}$ $\quad s = \dfrac{1}{\frac{4}{5}} = 1\frac{1}{4}$

25/18) gleichs Δ



$s = \dfrac{a_1}{1-q}$ $\quad U$ $s = \dfrac{3a}{\frac{1}{2}} = 6a$

$a_1 = a$
$a_2 = \frac{1}{2} a$
$q = \frac{1}{2}$

$F_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\quad q = \frac{1}{4}$ $\quad \cancel{sF = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} =}$

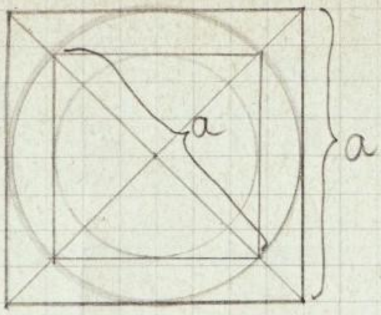
$F_2 = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{4}$

$\cancel{\dfrac{4a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}}$

$F_1 = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\qquad sF = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

$F_2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$ $\quad q = \frac{1}{4}$

25/20)



a) Umfänge: $a_1 = 4a$

$a_2 = \cancel{4}^{2}\,\frac{a}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$

$q_2 = 4a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$sU = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}} = \frac{8a(2+\sqrt{2})}{2} = \underline{\underline{4a(2+\sqrt{2})}}$$

Inhalte: $a_1 = a^2$

$a_2 = a^2\ \frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a^2}{\cancel{4}_2}\cdot\cancel{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{sF}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2a^2}}$$

b) $a_1 = \frac{a}{2}\pi$

$a_1 = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{a}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi = \frac{a}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\underline{\underline{sU}} = \frac{\frac{a}{2}\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2a\pi}{2-\sqrt{2}} = \frac{2a\pi(2+\sqrt{2})}{2} = \underline{\underline{a\pi(2+\sqrt{2})}}$$

$a_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi = \frac{a^2}{4}\cdot\pi$

$a_2 = \left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi = \left(\frac{a}{4}\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi = \frac{a^2}{8}\cdot\pi \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{sF}} = \frac{\frac{a^2}{4}\cdot\pi}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{2}\cdot\pi}}$$

$\frac{1}{1-x} = 1+x$, wenn $|x|<1$

$1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$ Bsp. $\frac{1}{0.99} \approx 0.01$

$\frac{1}{1.003} = 0.997$

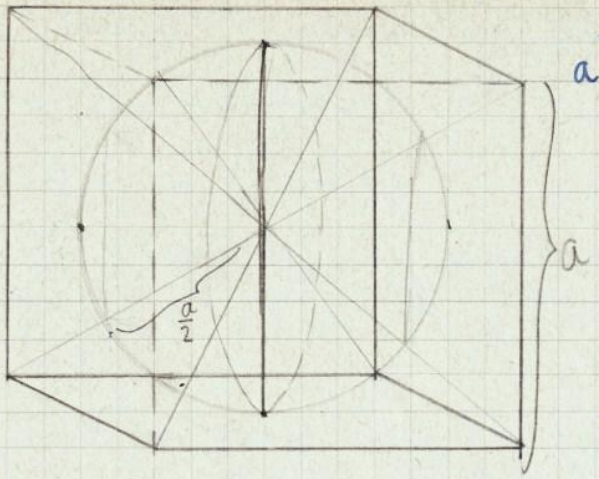
26/26) a) $1+x^2+x^4+x^6+\dots$ Fehler bei $x=0.02$: Summe der vernachläßigten Glieder $= x^4+x^6+\dots$

$|x|<1$ $\underline{\underline{s = \frac{1}{1-x^2}}}$

$s = 1.00040016$

$1+x^2 = 1.0004$

25/21)



a) Umfänge $a_1 = 8a \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{a}{\sqrt{3}}$

$a_2 = 8a\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow q = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \cancel{q = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$sU = \frac{8a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16a}{2-\sqrt{2}} = \cancel{\frac{16a(2+\sqrt{2})}{2}} = \underline{\underline{8a(2+\sqrt{2})}}$$

Inhalte: $a_1 = a^3$

$a_2 = a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8_4}$

$= a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\underline{\underline{sI}} = \frac{a^3}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4a^3}{4-\sqrt{2}} = \frac{4a^3(4+\sqrt{2})}{14} = \underline{\underline{\frac{2a^3(4+\sqrt{2})}{7}}}$$

b) Würfelinhalte

$a_1 = a \qquad V_1 = a^3$

$a_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad V_2 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \qquad q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$$S_V = \frac{a^3}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}} = a^3\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1} = a^3\frac{3\sqrt{3}(3\sqrt{3}+1)}{26}$$

$$= a^3\frac{27+3\sqrt{3}}{26}$$

a) Umfänge $a_1 = 8a$

$a_2 = 8a\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$sU = \frac{8a}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{8a}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{24a}{3-\sqrt{3}} = \frac{24a(3+\sqrt{3})}{6} = \underline{\underline{4a(3+\sqrt{3})}}$$

Inhalte: $a_1 = a^3$

$a_2 = \left(a\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = a^3\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \rightarrow q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$$sI = \frac{a^3}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{3\sqrt{3}-1} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}a^3(3\sqrt{3}+1)}{26}}} = \frac{27a^3+3\sqrt{3}a^3}{26} =$$

b) Volumina:

$a_1 = \frac{a}{2} \qquad V_1 = \cancel{a^3}\ \frac{4\pi \cdot a^3}{3 \cdot 8}$

$a_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}} \qquad V_2 = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \rightarrow q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$$sV = \frac{a^3}{1-\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{3\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}a^3(3\sqrt{3}+1)\cdot 4\pi}{26 \cdot 3}$$

Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit den Anordnungsmöglichkeiten gewisser Objekte (Elemente).

Permutationen (Reihenfolgen)

abc bac cab
acb bca cba

LEIB
BEIL
BIEL
LIEB
BLEI

Unter Permutationen einer Menge von n Elementen versteht man die verschiedenen Anordnungen aller Elemente, welche sich nur in der Reihenfolge unterscheiden.

a) Alle Elemente sind verschieden.

		Anzahl der Permutationen	
$n=1$	a	1	a
$n=2$	a, b	2	ab, ba
$n=3$	a, b, c	6	
$n=4$	a bcd b a cbd b a dbc b a dcb 1 a cdb 1 a bdc 1	24	

Allgemein: $P_{(n)} = P_{(n-1)} \cdot n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots = \underline{\underline{n!}}$

$P_{(n)}$: Anzahl Permutationen

b) Einige Elemente sind unter sich gleich:

ANNA

ANna AaNn
ANan AanN
AnNa
AnaN

Wiederholt sich ein Element zweimal, so sind die Permutationen, welche sich nur in der Reihenfolge dieser beiden Elemente unterscheiden, nicht mehr verschieden.

$P_{(n)(2)} = \frac{n!}{2}$

ADAMAS ADaMaS

$\frac{6!}{3!}$ $6!$

Schreibt man hier all die drei A's verschieden, so gibt es 6! verschiedene Permutationen. Werden dann die drei A-s wieder gleich geschrieben, so sind je 3! Permutationen nicht mehr unterscheidbar. Die Anzahl der verschiedenen Permutationen ist also $\frac{6!}{3!}$

Allg.: Wiederholen sich von den gegebenen n Elementen eines p-Mal, eines q-mal, usw, so gilt es

$$P_{n(p,q,\ldots s)} = \frac{n!}{p!\,q!\cdots s!}$$

2) Variationen

Wählt man von verschiedenen Elementen $k\ (<n)$ unter Berücksichtigungen deren Reihenfolge, so redet man von Variationen. Die Anzahl Variationen von n Elementen zur Klasse k ist

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Berücksichtigt man die Reihenfolge der gewählten Elemente nicht, so heißen diese Anordnungen Kombinationen, und es gibt:

$$K_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)} = \binom{n}{k} \quad \text{„}n \text{ über } k\text{"}$$

33/11) 1, 3, 5, 7, 9 $\quad n=5$, $k=2$ $\quad K_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = \cancel{10}$ 20

34/13) a) $\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1$ $\quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$ $\quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(0)!} = 1$

b) $\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3)!} = 1$ $\quad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3}{1\cdot\cancel{1\cdot 2}} = 3$ $\quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$

$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1$

c) 1, 4, 6, 4, 1

d) 1, 5, 10, 10, 5, 1

Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

<u>Beweis:</u> links: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

rechts: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Bsp.: $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$

$21 + 35 = 56$

<u>Beweis:</u> $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$= \frac{(k+1)\cdot n!}{\underbrace{k!(k+1)}_{(k+1)!}\,(n-k)!} + \frac{(n-k)\cdot n!}{(k+1)!\underbrace{(n-k-1)!\,(n-k)}_{(n-k)!}}$$

$$= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}$$

<u>Der binomische Lehrsatz</u>

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

<u>Beweis durch vollständige Induktion</u>

$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$

$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

usw.

2) Induktionsbeweis

Es sei $n \in \mathbb{N}$ für die gilt:

$$\circledast \quad (a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \dots + \binom{m}{k}a^{m-k}b^k + \dots + \binom{m}{m}b^m$$

Zu beweisen ist, daß dann auch

$$(a+b)^{m+1} = \binom{m+1}{0}a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m b + \dots + \binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k + \dots + \binom{m+1}{m+1}b^{m+1}$$

Zum Beweis multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung $\circledast$ der Vor. mit $(a+b)$:

links: $(a+b)^m \cdot (a+b) = (a+b)^{m+1}$

rechts: Jedes Glied wird mit a und mit b multipliziert:

$$\left[\binom{m}{0}a^{m+1} + \binom{m}{1}a^m b + \binom{m}{2}a^{m-1}b^2 + \dots + \binom{m}{k}a^{m+1-k}b^k + \dots + \binom{m}{m}ab^m\right]$$

$$+\left[\binom{m}{0}a^m b + \binom{m}{1}a^{m-1}b^2 + \dots + \binom{m}{k}a^{m-k}b^{k+1} + \dots + \binom{m}{m}b^{m+1}\right]$$

$\uparrow \binom{m}{k-1}a^{m-k+1}b^k$

Zusammenzählen:

a^{m+1} kommt einmal vor: $\binom{m+1}{0}a^{m+1}$

$a^m b$ " zweimal vor: $\binom{m}{1}a^m b + \binom{m}{0}a^m b = \binom{m+1}{1}a^m b$

$a^{m+1-k}b^k$ " " ": $\binom{m}{k-1}a^{m-k+1}b^k + \binom{m}{k}a^{m-k+1}b^k$

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$$

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6 b + \binom{7}{2}a^5 b^2 + \binom{7}{3}a^4 b^3 + \binom{7}{4}a^3 b^4 + \binom{7}{5}a^2 b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$
$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(1+x)^8 = \binom{8}{0}1 + \binom{8}{1}x + \binom{8}{2}x^2 + \binom{8}{3}x^3 + \binom{8}{4}x^4 + \binom{8}{5}x^5 + \binom{8}{6}x^6 + \binom{8}{7}x^7 + \binom{8}{8}x^8$$

$$= 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & 2^0 \\ & & & 1 & 2 & 1 & & & 2^1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & 2^2 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & 2^3 \end{array}$$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots \qquad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

nur gerade k

→ Summe genau die Hälfte der ganzen

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots = \underline{\underline{0}}$$

36/31) $\{1,2,3\}$ $\{n \text{ Elemente}\}$

$\{\}$ $\{\}$

$\{1\}\ \{2\}\ \{3\}$ $\{\text{ein Element}\}$ $(n) = \binom{n}{1}$

$\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{2,3\}$ $\{\text{zwei Elemente}\}$ $\binom{n}{2}$

$\{1,2,3\}$ $\vdots$ $\binom{n}{n}$

Die Anzahl der Teilmengen einer Menge von n Elementen ist $\underline{\underline{2^n}}$

36/24) $(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2$

23b) $(x+y)^8 =$ 3. Glied: $\binom{8}{2}x^6y^2$

5. Glied: $\binom{8}{4}x^4y^4$

c) $(1+x)^{10} =$ 4. Gl. $\binom{10}{3}x^3$

8. Glied $\binom{10}{7}x^7$

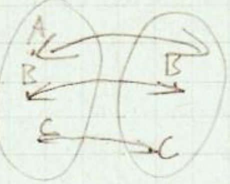
$$\left(1+\frac{2}{1000}\right)^5 = 1 + \binom{5}{1}\frac{2}{1000} + \binom{5}{2}\left(\frac{2}{1000}\right)^2$$

$$1.002^5 \approx 1 + \frac{1}{1000} + \frac{4}{10^6} + \dots = 1.001004$$

Kombination: Geg.: n Elemente. Davon werden k Elemente gewählt.

Formelbuch S.26:

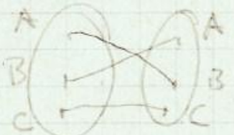
bijektive Zuordnung:



$20! = 2{,}4329 \cdot 10^{18}$

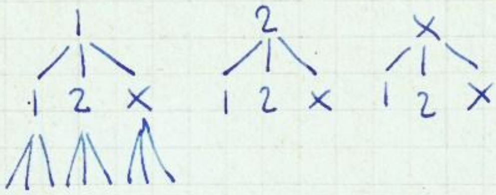
1	2	3
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

→



Totozettel

1
2
x
x
x
x



<u>Variationen mit Wiederholung</u> sind Anordnungen von je k Elementen, genommen von n gegebenen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge, wobei jedes Element beliebig oft auftreten darf.

1, 2, 3, 4, 5, 6

Anzahl der Möglichkeiten $V_{n(W)}^{(k)} = n^k$

└ Wiederholung

3 Hüte schwarz, rot, blau
3 Röcke schwarz, rot, blau
3 paar Schuhe schwarz, rot, blau
3 Taschen schwarz, rot, blau

3^4 Möglichkeiten zu kombinieren
(Farbe darf wiederholt werden)

33/11) 1, 3, 5, 7, 9 $V_n^{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cancel{(1\cdot2\cdot3)}} = 20$ 13 15 17 19 35, 57, 79 37 39 59 4/12/18

$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10$

$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1} = 5$

12) b, d, g, l, x, s

$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3(1\cdot2\cdot3)4} = 30$ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3(1\cdot2\cdot3\cdot4)}$ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

18) a) $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1.4857\cdot10^{138}}{5!\,2.817\cdot10^{128}} = 4395\ldots10^{10}$ $4.39\cdot10^{7}$

b $\frac{49!}{6!(43)!}$ 998844 $1.398\ 10^{7}$

Kombinationen mit Wiederholung

Kombinationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung sind, wie diejenigen ohne Wiederholung Anordnungen, bei denen es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. Nur Kombinationen, welche sich in den beteiligten Elementen unterscheiden, sind verschieden. Dabei darf sich ein Element bis k-mal wiederholen, wobei jetzt auch $k > n$ erlaubt ist.

Die gegebenen Elemente seien 1, 2, 3, 4, 5

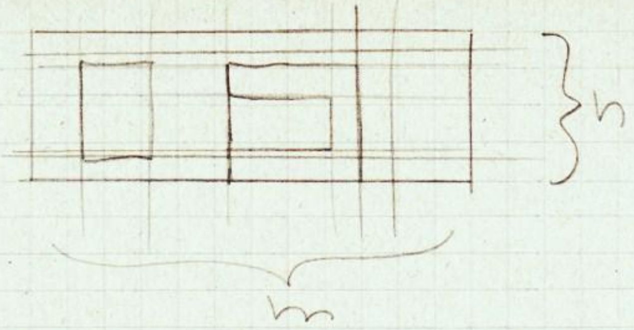
k = 1	1	2	3	4	5
k = 2	11	12	13	14	15
		22	23	24	25
			33	34	35
				44	45
					55

$K^{(2)}_{5(w)} = 15$

$K^{(3)}_{5(w)} = 35$

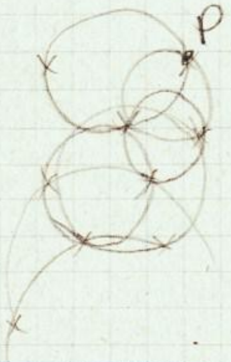
$$K^{(k)}_{n(w)} = K^{(k)}_{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

66/1)



$$\binom{n+2}{2}\cdot\binom{m+2}{2}$$

66/2)



$$\frac{8\cdot 7}{2} \qquad \text{Anzahl: } \binom{8}{2}$$

3, 4, 5

4) 1. Knabe $\binom{12}{4}$ Möglichkeiten $\quad \binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 4}$

2. " $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten

$= \underline{\underline{34650}}$

---

3) $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{8!}{5!} = \underline{\underline{3360}}$

---

5) Streit - Siena

$\underbrace{\text{S treit}}_{60}$

$\underbrace{\text{Ts reit}}_{24}$

$\underbrace{\text{Trs eit}}_{6}$

$\underbrace{\text{Tre sit}}_{6}$

Triset
Triste } 3
Triest

$\underline{\underline{99}}$

$\underbrace{\text{A sien}}_{24}$

$\underbrace{\text{Sa ien}}_{6}$

Siaen
Siane } 4
Siean
Siena

$\underline{\underline{34}}$

$\underbrace{\text{T ank}}_{6}$

$\underbrace{\text{At nk}}_{6}$

$\underbrace{\text{Nt ak}}_{6}$

Ktan
Ktna } 4
Katn
Kant

$\underline{\underline{22}}$

(66/8) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

$10! - 9! = 10 \cdot 9! - 9! = 9!(10-1) = \underline{\underline{3'265'920}}$

↳ 0 am Anfang

9) a) 120 b)

$5! - 4!$ 96

10) A + B = eine Person, können sich vertauschen

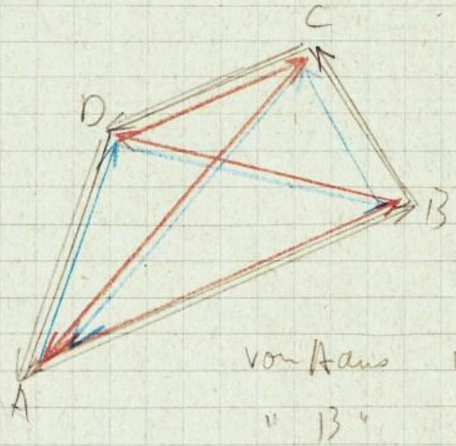
$2 \cdot 5!$

(67/11) 3-Eck 1 Möglichkeit

4- " mehrere $\underline{\underline{3}}$

5- " " $\underline{\underline{12}}$

$\frac{(n-1)!}{2}$ Umlaufsinn



von A aus n-1 Möglichkeiten

" B " n-2 "

" C " n-3 "

13) 10 Mitglieder, wenn alle 10 Mitglieder spielen?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{5!} = 945$$

(67/14) x = Anzahl Teilnehmer

2 Spieler mehr → 21 Spiele mehr Partie gegeneinander → −1

Ursprüngliche Spielerzahl : $\underline{10}$

67/17 a) $\binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2}$ 66 b) $\binom{n}{2}$

---

c) – zuerst nur 11 Geraden $\Rightarrow \binom{11}{2}$, dann noch dritte Gerade $\Rightarrow$ + 9 Ebenen

64

– zuerst wie wenn alle normal wäre $\Rightarrow \binom{12}{2}$ dann -2 Ebenen 64

$\binom{n}{2} - \left[\binom{m}{2} - 1\right]$

└ da eine Ebene übrigbleibt

67/20a) 30 Gerade 5 parallel

– $\binom{25}{2}$ $+\underbrace{5\cdot 25}$ $= 425$

└ Gerade ohne Parallelen

alle Schnittpunkte, die die 25 Geraden mit den Parallelen haben.

– 5 Parallele 0 Schnittpunkte

6. Gerade 5 "

7. Gerade 6 "

8. " 7 "

↓ ↓

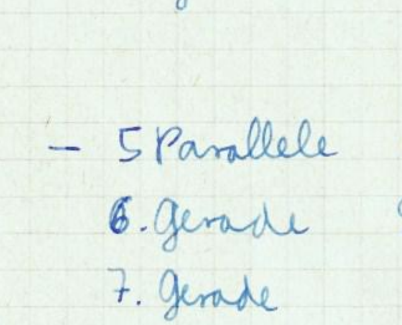
30 29

425

– $\binom{30}{2} - \binom{5}{2}$ $= 425$

└ Schnittpunkte der Parallelen

67/21a)



12 Strecken

b) 15 Geraden

Jede Gerade hat 14 Schnittpunkte. Je zwei Schnittpunkte bezeichnen eine Gerade

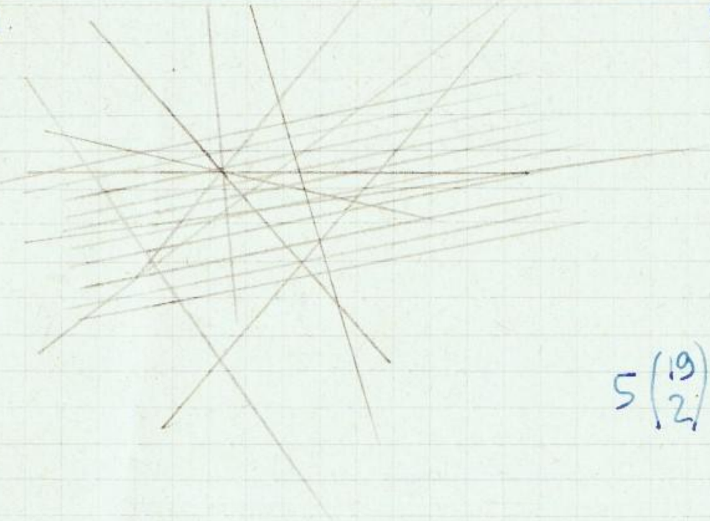
$15 \cdot \binom{14}{2} = 1365$

c) $n\binom{n-1}{2}$

68/23) 12 Geraden haben je 19 Schnittpunkte
Parallelen haben je 12 Schnittpunkte

$12\binom{19}{2} + 8\binom{12}{2} = 2580$

68/24)



20 Geraden
5 je 19 Schnittpunkte
10 je 10 "
5 je 16 "

$5\binom{19}{2} + 10\binom{10}{2} + 5\binom{16}{2}$

68/25) $\binom{10}{5}$ Möglichkeiten für Fünfergruppen
$\binom{5}{3}$ " " Dreier- "
1 " " Zweiergruppe

$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3}$ 840

30 1 Würfel 6 Möglichkeiten
2 " 36 "
3 " 6^3 "
$\rightarrow$ 6^n "

4 Würfel 6^4
3 " $6^3 \cdot \binom{4}{3}$

$6^4 + \binom{4}{3}6^3 + \binom{4}{2}6^2 + 4 \cdot 6$

68/31) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
a) $n^k = 81$ b) $n^k = 729$

68/32)

68/33) 1, 3, 5, 7, 9
$n^k = 625$

77/28) $(1+x)^{10} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1}x + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{3}x^3 + \binom{10}{4}x^4 +$

$\binom{10}{4}x^4 = 41\frac{13}{27}$

$\frac{10!}{4!\,6!} \cdot x^4 = 41\frac{13}{27}$

$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^4 = \frac{1120}{27}$

$x^4 = \frac{16}{81}$

$x^4 - \frac{16}{81} = 0$

$x^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0$

$\left[x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \cdot \left[x + \frac{2}{3}\right]\left[x - \frac{2}{3}\right] = 0$

$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{2}{3}i$

$x_2 = -\frac{2}{3} \quad x_4 = -\frac{2}{3}i$

76/20i) $i, (i)^2 = -1, (i)^3 = -i, (i)^4 = 1, (i)^5 = i \,|\, (-i)$

$(1+i)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}i + \binom{5}{2}(-1) + \binom{5}{3}(-i) + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}i = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i$

$(1-i)^5 = \binom{5}{0} - \binom{5}{1}i + \binom{5}{2}$

$1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i$

$2 - 20 + 10 = -8$

$(-i)$

$(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$

$(-i)^3 = (-i)^2 \cdot (-i) = (-1)(-i) = i$

76/18a) $(2+3i)^5 = \binom{5}{0}\cdot 32 + \binom{5}{1}\cdot 16\cdot 3i + \binom{5}{2}\cdot 8\cdot(-9) - \binom{5}{3}\cdot 4\cdot 27i + \binom{5}{4}\cdot 2\cdot 81 + \binom{5}{5} 3\cdot 81i$

$= 32 + 240i - 720 - 1080i + 810 + 243i$

$= 122 - 597i$

Lam 274/19a) Wenn das Quadrat drehbar, – Quadrat nicht drehbar

Funktionen

eindeutige Zuordnung eines Elementes zu einem anderen.

Definitionsbereich
Wertebereich der Umkehrfunktion

Wertebereich
Def.-Bereich der Umkehrfunktion

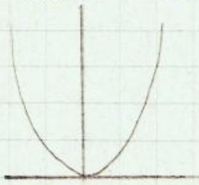
Lambacher S. 38/39

$x_2 > x_1$
$f(x_2) > f(x_1)$
streng monoton wachsend

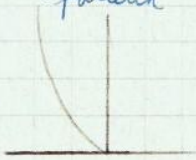
$x_2 > x_1$
$f(x_2) < f(x_1)$
streng monoton fallend

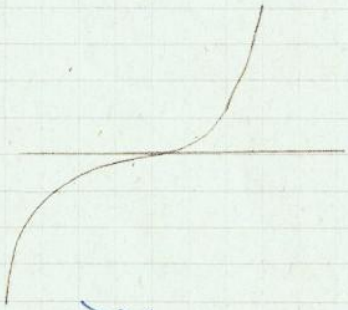
Bsp.: $\cancel{x} = x^2$ $\quad -3 \leq x \leq 3$ $\quad -3 < x < 0$

weder noch



streng monoton fallend





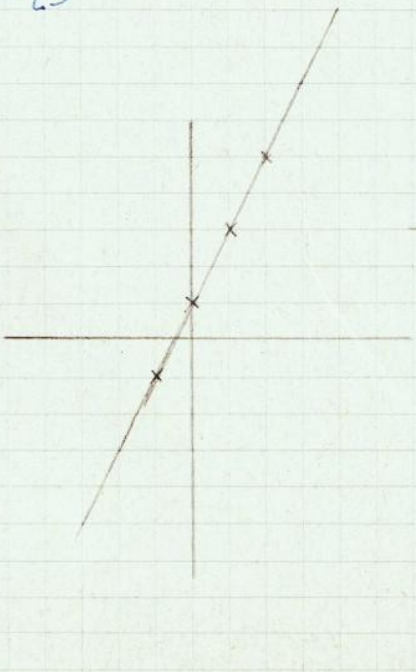
$x_2 > x_1$
$f(x_2) \geq f(x_1)$

$f(x) = y = x^2$
$f(5) = 25$
nicht umkehrbar, da $(+5)^2 / (-5)^2 = 25$

Einschränkung: nur pos. Zahlen
$y = x^2$ für $x \geq 0$
umkehrbar

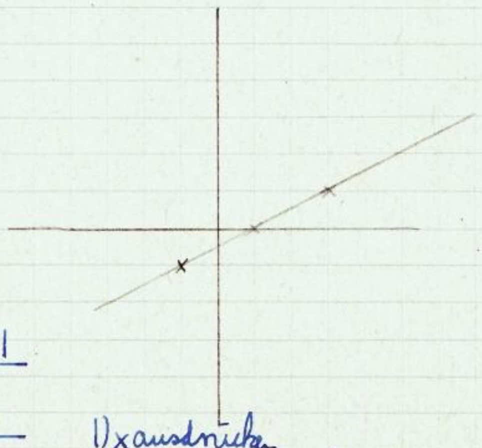
$y = 2x + 1$

x	y
0	1
1	3
2	5
-1	-1



Umkehrung der Funktion:

x	y
1	0
-1	-1
3	1



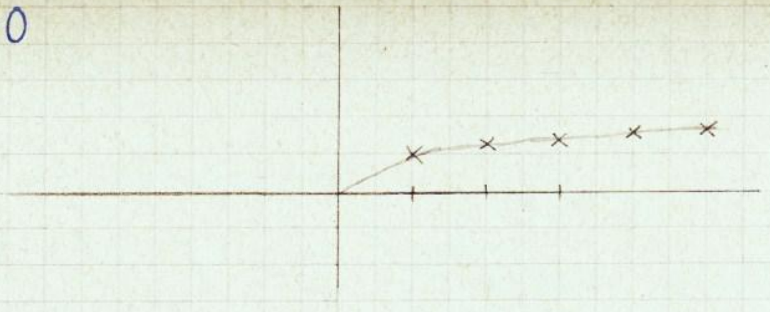
$x = \frac{y - 1}{2}$

$y = \frac{x - 1}{2}$

1) x ausdrücken
2) x u. y vertauschen

$y = \frac{x}{1+x} \quad x > 0$

x	y
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{3}{4}$
0	0
4	$\frac{4}{5}$



Umkehrfunktion:

$x = y(1+x)$

$x = y + xy$

$x(1-y) = y$

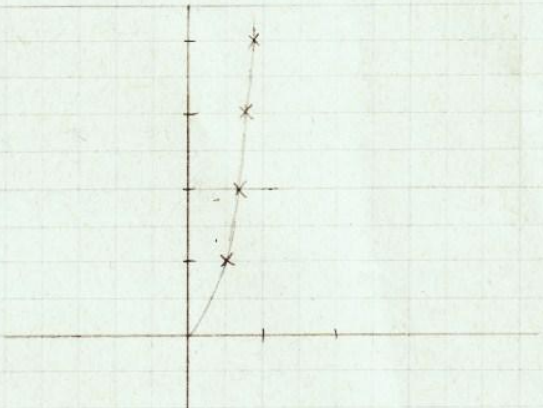
$x = \frac{y}{1-y}$

Vertauschung:

$y = \frac{x}{1-x}$

$(0 < x < 1)$

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	



Asymptote: „eine Tangente im Unendlichen"

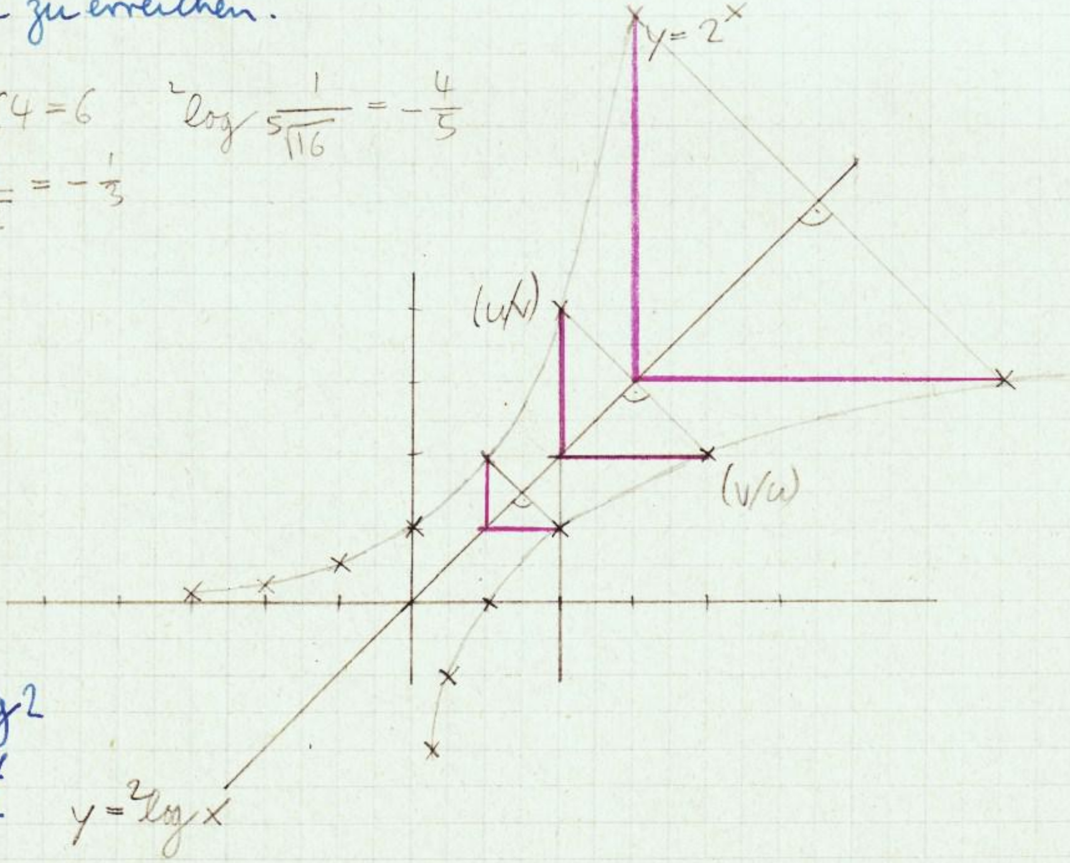
Eine Gerade, an welche die Funktionskurve immer näher herankommt, ohne sie zu erreichen.

$^2\log 64 = 6 \qquad {}^2\log \frac{1}{\sqrt[5]{16}} = -\frac{4}{5}$

$^2\log \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{3}$

$y = 2^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{8}$



$\lg y = x \lg 2$

$x = \frac{\lg y}{\lg 2}$

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3

48 5a/b/c/d, 6, 7

48/5 a) $y = 5 - \frac{1}{x}, x > 0$ zu 4 u. 5

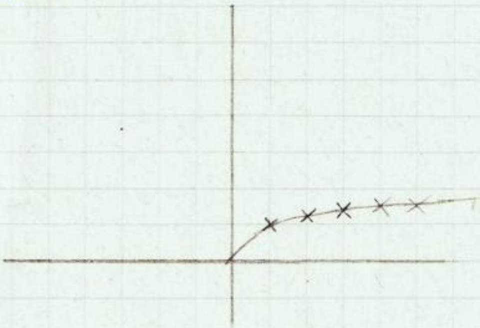
b) $y = 7 + \frac{1}{x}$ $x < 0$ nach unten beschränkt, 8

c) $y = 2^x$ $-\infty < x < \infty$ nach unten mit 0

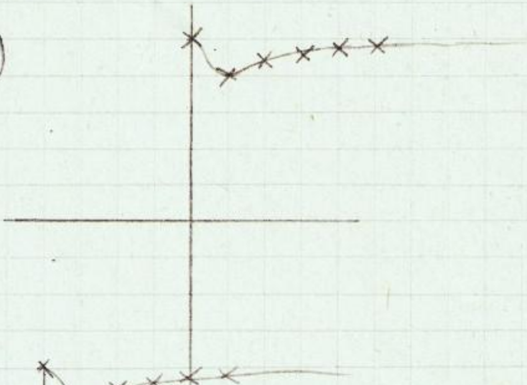
d) $y = \frac{2x}{x+1}$ $x \geq 0$ nach unten 0, nach oben 2

d)

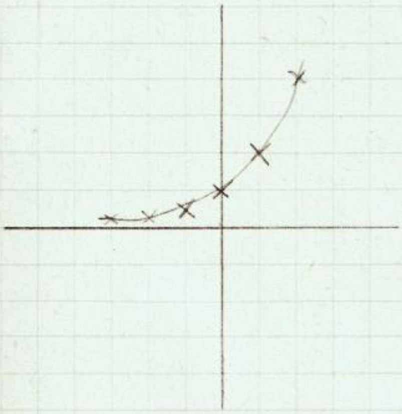
x	y
0	0
1	1
2	$\frac{4}{3}$
3	$\frac{3}{2}$
4	$\frac{8}{5}$
8	$\frac{16}{9}$



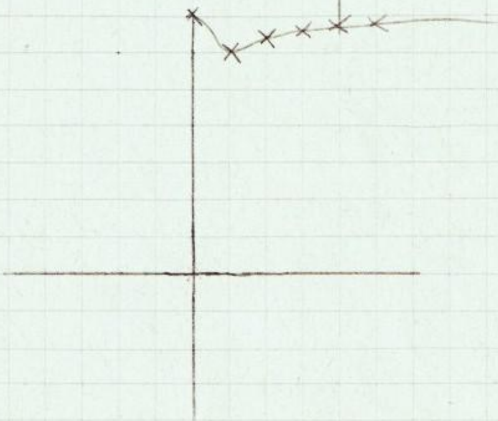
a)



c)



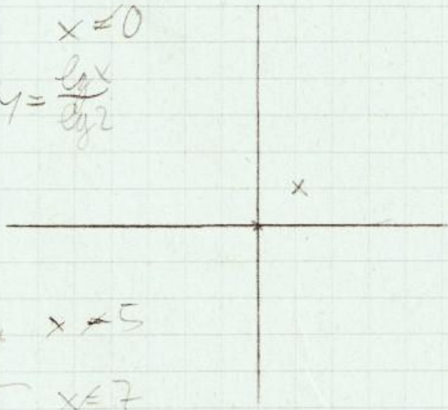
b



6) c,d = monoton

7) c) $y = 2^x$ $x \neq 0$

$x = \frac{\lg y}{\lg 2}$ $y = \frac{\lg x}{\lg 2}$



d) $y = \frac{2x}{x+1}$ $\cancel{y} = \frac{x}{2-x}$ $0 < x < 2$

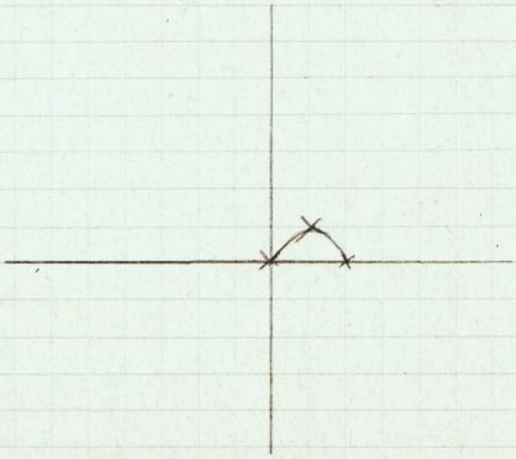
$(x+1)y = 2x$

$-2x + yx = -y$

$2x - xy = y$

$x(2-y) = y$

$x = \frac{y}{2-y}$

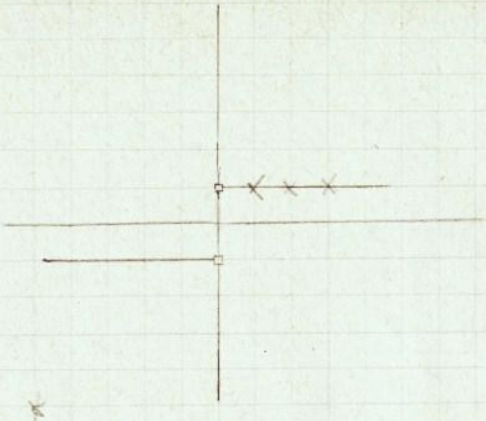


a) $y = \frac{1}{5-x}$ $x \neq 5$

b) $y = \frac{1}{}$ $x \in 7$

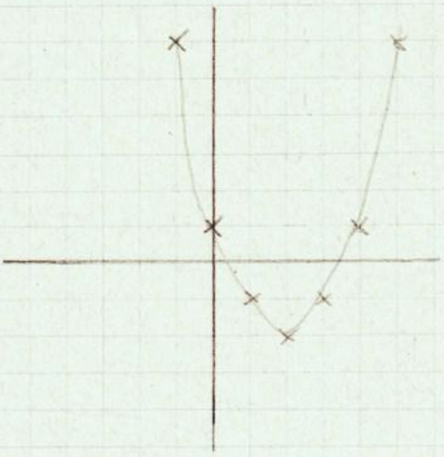
$x < 7$

$y = \frac{x}{|x|}$ $\qquad |x| = \begin{cases} x, \text{ wenn } x \geq 0 \\ -x, \text{ wenn } x < 0 \end{cases}$

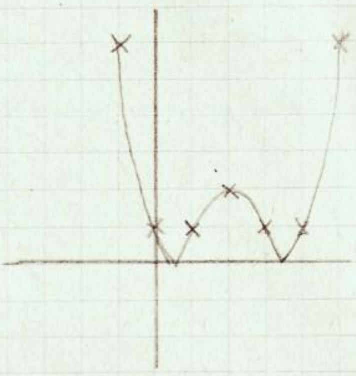


$y = a(x-p)^2 + q$

$y = (x-2)^2 - 3$



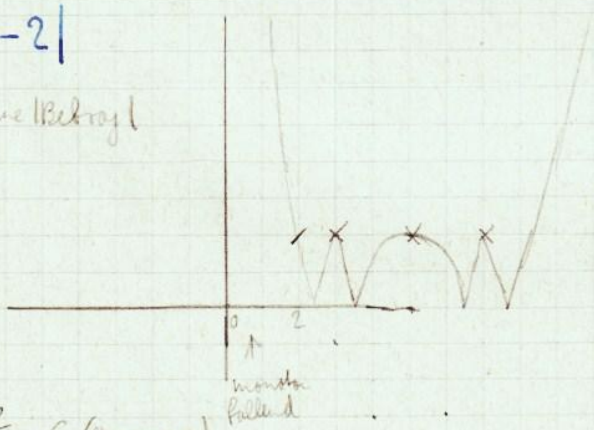
$y = |(x-2)^2| - 3$ (keine neg. Werte mehr)



$y = ||(x-5)^2 - 4| - 2|$

Kurve ohne |Betrag|

x	y
0	21
1	12
2	5
5	-4
6	-3



$y = (x-5)^2 - 6 \quad (0 < \cancel{y} < 2)$

Umkehrfunktion: $y + 6 = (x-5)^2$

$x - 5 = \sqrt{y+6}$

$x = 5 - \sqrt{y+6}$

$y = 5 - \sqrt{x+6}$

44 / 16a, b

59) Wie heißt die fünfgliedrige geometrische Folge, bei der das Produkt aller Glieder 2^{15}, ihre Summe 62 ausmacht?

60) Drei Zahlen u, v, w sind so zu bestimmen, daß ihre Summe 3 ist; in der Reihenfolge u, v, w sollen sie eine arithmetische, in der Reihenfolge v, w, u dagegen eine geometrische Folge bilden.

61) Eine geometrische Folge besitzt vier Glieder. Die Summe der beiden äußeren Glieder beträgt 195, die Summe der beiden Mittelglieder 60. Wie heißt die Folge?

62) Drei Zahlen sollen eine geometrische Folge bilden; erhöht man die zweite um vier, so geht die Folge in eine arithmetische über; erhöht man nachher auch die dritte Zahl, und zwar um 32, so wird die Folge wieder geometrisch. Welches sind die drei ursprünglichen Zahlen?

63) In einer geometrischen Folge von vier Gliedern übertrifft das zweite das erste um 4, und das vierte ist um 36 größer als das dritte. Wie heißt die Folge?

64) Eine geometrische Folge aus sechs Gliedern ist zu bilden, so daß die Summe der beiden äußersten Glieder 33 [244], die Summe der beiden Mittelglieder 12 [36] ausmacht.

65) Die Summe einer aus fünf Gliedern bestehenden geometrischen Folge beträgt 484, die Summe der Glieder mit geradzahliger Nummer 120. Wie heißt die Folge?

66) Von vier aufeinanderfolgenden Zahlen bilden die drei ersten eine geometrische Folge, die drei letzten eine arithmetische Folge. Die Summe des ersten und des letzten Gliedes ist gleich 8, die Summe der beiden mittleren 6. Wie heißen die vier Glieder?

+66) Die Summe dreier Zahlen, die eine geometrische Reihe bilden, beträgt 35, die Summe ihrer Quadrate 525. Welche Zahlen sind es?

Aufgaben aus der Geometrie

67) Die Maßzahlen der Winkel eines Vierecks bilden eine geometrische Folge. Der letzte Winkel ist viermal größer als der zweite. Berechne die Winkel.

68) Aus den Höhen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite $s = 20$ cm sei ein Dreieck konstruiert, aus dessen Höhen ebenfalls usw. Wie groß ist das vierte Dreieck (das gegebene mitgezählt), und wie groß ist die Summe der Inhalte aller vier Dreiecke?

69) Die sechs in einer Ebene liegenden Strahlen eines Büschels folgen unter einem Winkel von je 60° aufeinander. Im Abstand a vom Scheitel aus wähle man auf dem ersten Strahl einen Punkt, fälle von diesem das Lot auf den zweiten Strahl, vom Fußpunkt aus wieder das Lot auf den dritten Strahl usw., bis man auf den ersten Strahl zurückkommt. Berechne die Summe der Längen der sechs Lote.

+69) Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen a, aq und aq^2, wobei a zur längsten Seite gehört. a) Zwischen welchen Schranken muß q liegen, damit das Dreieck existiert?, b) wie groß muß q sein, wenn das Dreieck rechtwinklig sein soll?

Aufgaben aus den Naturwissenschaften

70) Ein Gefäß enthält 20 l Alkohol. Man schöpft zehnmal nacheinander einen Liter aus dem Gefäß und ersetzt den Ausfall jedesmal durch einen Liter Wasser. Wieviel Alkohol enthält die Mischung schließlich noch? (Von der aus physikalisch-chemischen Gründen bedingten Volumenänderung ist abzusehen.)

71) Die Glocke einer Luftpumpe habe einen Inhalt von 10 dm³, der Stiefel fasse 2 dm³. Wie groß wird die Luftverdünnung nach 1, 2, 3, .., n Kolbenzügen sein? Nach wieviel Kolbenzügen würde die Dichtigkeit der Luft nur noch $\frac{1}{1000}$ der ursprünglichen betragen?

72) In eine Nährflüssigkeit werden 10 Kugelbakterien gebracht, deren Zahl sich durch einfache Teilung in der Zeit von je einer Stunde verdoppelt. a) Wie groß wird die Zahl nach 24 Stunden sein? b) Wie lange würde es gehen, bis das Gesamtvolumen der Bakterien 1 cm³ ausmacht, wenn angenommen wird, daß jede Bakterie die Gestalt einer Kugel von $\frac{1}{100}$ mm Durchmesser hat?

+73) Als Beispiel einer chromatischen Tonleiter wählen wir folgende 13 Klaviertöne: a_1 *b h c cis d dis e f fis g gis* a_2. Die Schwingungs-