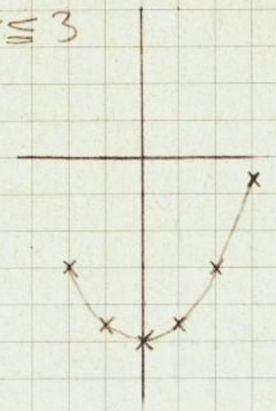
Algebra 7a MNG II
mit Contos

44/16a) $y=\frac{1}{2}x^2-5$

$-2 \leqq x \leqq 3$

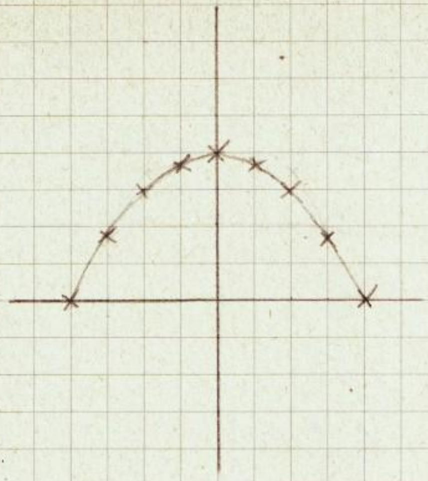
x	y
0	-5
1	-4.5
2	-3
-1	-4.5
-2	-3
3	$-\frac{1}{2}$



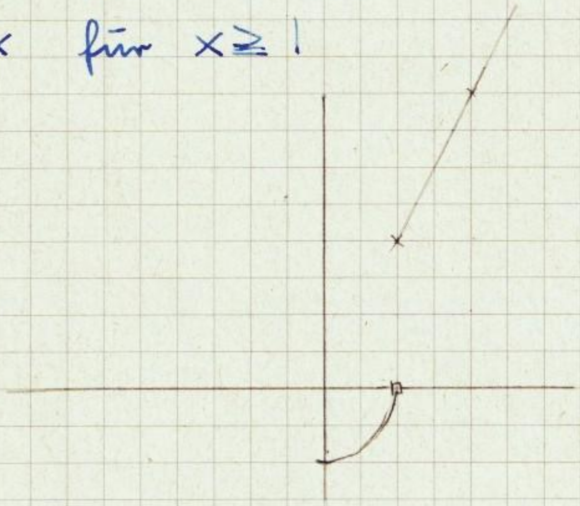
b) $y=4-\frac{x^2}{4}$

$-4 \leqq x \leqq 4$

x	y
0	4
1	$3\frac{3}{4}$
-1	$3\frac{3}{4}$
±2	3
±3	$1\frac{3}{4}$
±4	0

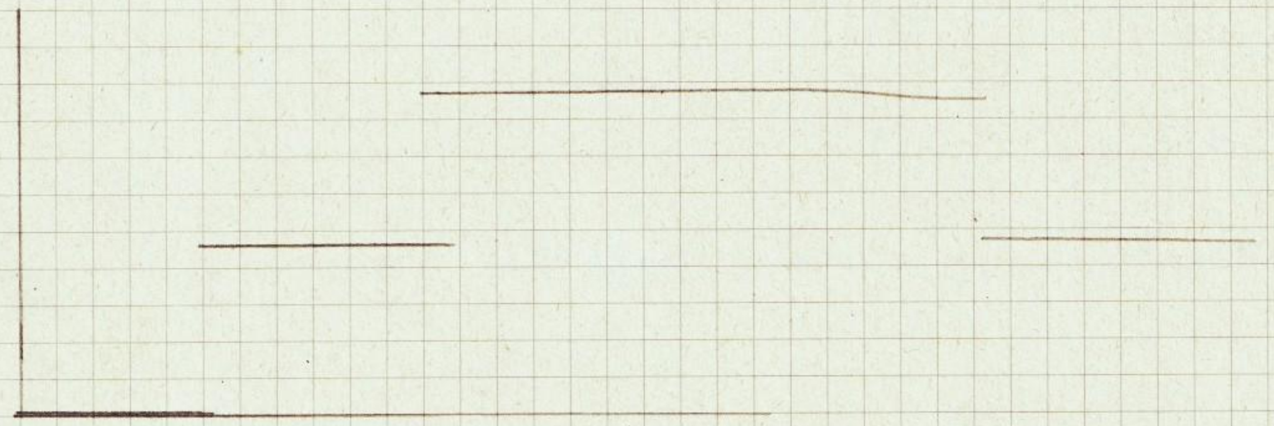


$$x \Rightarrow y = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } 0 \leqq x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$$



x = Alter

$$y = \begin{cases} 0 \text{ für} & 0 < x < 6 \\ 14 \text{ Fr.} & 6 < x < 16 \\ 28 \text{ Fr.} & 16 < x < 65 \\ 14 \text{ Fr.} & x > 65 \end{cases}$$



74/1)a) $P_1(1/2)$ $P_2(6/5)$

$m=\frac{5-2}{6-1}=\frac{3}{5}$

$y-2=\frac{3}{5}(x-1)$

$y-2=\frac{3}{5}x-\frac{3}{5} \quad |\cdot 5$

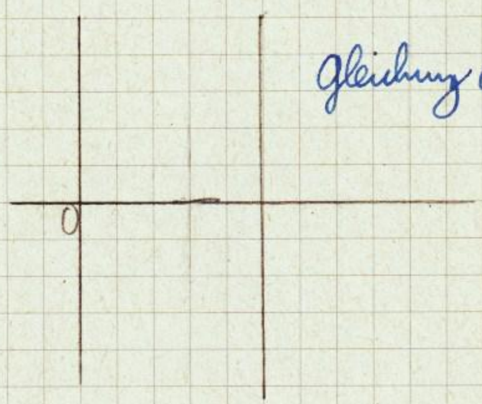
$5y-10=3x-3$

$\underline{\underline{3x-5y+7=0}}$

$P_1(5/7)$

$P_2(5/12)$

$m=\frac{5}{0}$?



Gleichung der Geraden $x=5$

43/14a-h

43 a) zw. $-\infty$ u. $+\infty$ b) zw. 0 $\wedge$ $+\infty$ $-\infty$ c) zw. 0 $\wedge$ ∞ $-\infty$ d) $-\infty \wedge \infty$

e) zw. $-\infty \wedge +\infty$ $x=1$ nicht $\mathbb{R}-\{1\}$ f) zw. $-\infty \wedge +\infty$ $\mathbb{R}-\{2,-2\}$ g) zw. $-3 \wedge 3$ h) $0 \wedge +\infty$

Zahlenfolgen Lamb. 48

$n \to \frac{n^2}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4} \dots$

$\frac{n^2}{n+1} < 1217$ $n^2 < 1214(n+1)$ keine obere Schranke

$n^2-1217n-1217=0$

$(n-608.5)^2-370272{,}25-1217<0$

$n \to (-1)^n \cdot \frac{n}{n+3}$ $-\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{7} \dots$

$n \to (-1)^{n+1} \cdot \sin n\frac{\pi}{2}$ $1, 0, -1, 0, 1, \dots$

$n \to \ln x$ $0, 0.69 \dots$

50/Bsp. 10) $a_n=\frac{1}{n}$ Beweis: $a_{n+1}<a_n$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$n<n+1$

$0<1$

Bsp. 11) $a_{n+1}>a_n$ $a_n=n-\frac{1}{n}$

$n+1-\frac{1}{n+1} > n+\frac{1}{n}$

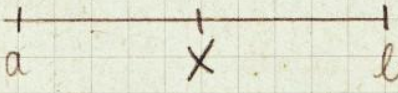
$1-\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n}$

$\frac{n+1-1}{n+1} > -\frac{1}{n}$

$\frac{n^2}{n(n+1)} > -\frac{n+1}{n(n+1)}$ $n^2 > -(n+1)$

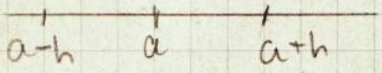
$n^2+n+1>0$

Theorie lesen



$a \leq x \leq b$ geschlossenes Intervall $[a, b]$

$a < x < b$ offenes Intervall $]a, b[$

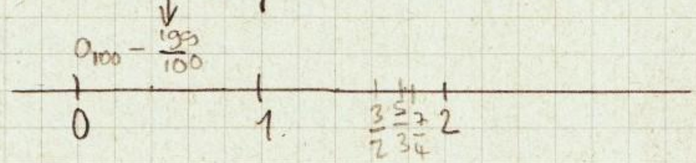


$$\underbrace{(a-h) < x < (a+h)}$$

„h"-Umgebung der Zahl a

$2 - \frac{1}{100} \mid 2 + \frac{1}{100}$

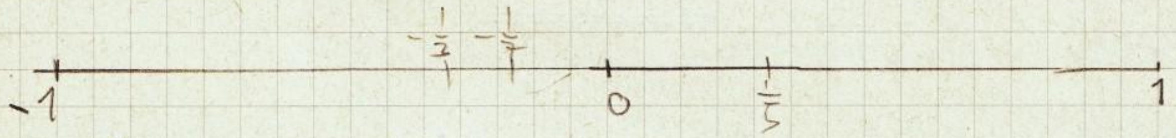
$a_n = \frac{2n-1}{n}$ $a_1 = 1$ $a_3 = \frac{5}{3}$ $a_2 = \frac{3}{2}$ $a_4 = \frac{7}{4}$



monoton steigend $\frac{3}{2}$ $\frac{+2}{+1}$ $\frac{+2}{+1}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$ lim von a_n für n strebt gg. ∞ ist gleich 2.

$a_n = \frac{\sin n\pi}{n}$ $b_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$



$a_1 = 0$
$a_2 = 0$
$a_3 = 0$

$b_1 = 1$
$b_2 = 0$
$b_3 = -\frac{1}{3}$
$b_4 = 0$

$b_5 = \frac{1}{5}$
$b_6 = 0$
$b_7 = -\frac{1}{7}$

alternierend

$|b_n| = \frac{1}{n}$

$a_n = \sin n\frac{\pi}{4}$

$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $a_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $a_8 = 0$

$a_2 = 1$ $a_6 = -1$

$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_4 = 0$ $a_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{1}{100} < x < \frac{1}{100}$

Die Zahl a heißt Grenzwert der Zahlenfolge $\{a_n\}$ genau dann, wenn man zu jeden noch so kleinen pos. ε $(\varepsilon > 0)$ ein n_ε findet, derart, daß $|a - a_n| < \varepsilon$, sobald $n > n_\varepsilon$ (Schwellenzahl).

S. 52, 53 Theorie

$|1-a_n| < \varepsilon \quad n > n_\varepsilon$

$1-\frac{n-1}{n} < \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{1}{10^6}$

$n-n+1 < n\cdot\varepsilon$

$1 < n\cdot\varepsilon$

$n\varepsilon > 1$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

54/4) $|0-a_n| = |a_n|$

a) $\frac{1}{3^{n-1}} \quad \varepsilon = 0.01$

$\frac{1}{3^{n-1}} < 0.01 \mid \varepsilon = 0.01$

$3^{n-1} > 100$

$(n-1)\lg 3 > \lg 100$

$n > \frac{2+\lg 3}{\lg 3} \quad n > 5.19$

$\underline{\underline{n_\varepsilon \text{ ist } \geq 6}}$

b) $\frac{2}{2n+3} = a_n \quad \varepsilon = 0.005$

$2n+3 > 400 \quad n > \frac{397}{2}$

$2n > 397 \quad n > 198.5$

$\underline{\underline{n_\varepsilon \geq 199}}$

c) $a_n = \frac{4\cdot(-1)^n}{3n-4} \quad \varepsilon = 0.002$

$\left|\frac{4\cdot(-1)^n}{3n-4}\right| < 0.002$ — kann weggelassen werden wenn man Betrag nimmt

$\frac{4}{3n-4} < 0.002 \quad n > 668$

$3n-4 > 2000 \quad \underline{\underline{n_\varepsilon = 668}}$

$n > \frac{2004}{3}$

$\underline{n = 670}$

$\frac{4}{2006} = 0.001994$

d) $a_n = \frac{4}{n^2+3}$

$\frac{4}{n^2+3} < 0.001 \quad \underline{\underline{n = 64}}$

$n^2+3 > 4000$

$n^2 > 3997$

$n > 63.221831$

$\left|1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right| < 0.0003 \rightarrow 1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} < 0.0003$ $\qquad 2^{\frac{1}{n}} > 1.0003$

$\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}} < 0.0003$ $\qquad +\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} < +0.9997$ $\qquad \frac{1}{n}\lg 2 < -\lg 0.9997$

n im Zähler u. Nenner
$\Rightarrow$ geht nicht

$\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} > +0.9997$ $\qquad \frac{1}{n} < \frac{-\lg 0.9997}{\lg 2}$

$n > -\frac{\lg 2}{\lg 0.9997} \approx 2310.15$

$\underline{\underline{n_\varepsilon \geq 2311}}$

Vor.: $\{a_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ $\qquad$ Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cg$ $\qquad$ Bew.: $|cg - ca_n| < \varepsilon \quad n > n_0$

$|c(g - a_n)| < \varepsilon \quad n > n_0$

$|c||g - a_n| < \varepsilon$

$|g - a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi(n-1)}{n} = \pi \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{17}{n} = 0$

Sind $\{a_n\}$ u. $\{b_n\}$ konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, so ist auch die Zahlenfolge $\{a_n + b_n\}$ bzw. $\{a_n - b_n\}$ konvergent mit dem Grenzwert $A+B$ bzw. $A-B$.

Nach der Vor. gibt es zu jedem noch so kleinen $\frac{\varepsilon}{2}$ eine Schwellenzahl n' derart, daß $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, sobald $n > n'$ und ein n'' derart, daß $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$, sobald $n > \max(n', n'')$.

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

sobald $n > n^*$ (wobei $n^* = \max(n, n'')$).

$$|(a_n - b_n) - (A-B)| = |(a_n - A) - (b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sind $\{a_n\}$ u. $\{b_n\}$ konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten A bzw. B, so konvergiert auch die Zahlenfolge $\{a_n \cdot b_n\}$ mit dem Grenzwert $A \cdot B$.

Beweis: Weil die Zahlenfolge b_n konvergent ist, ist sie auch beschränkt. Es sei K eine obere Schranke für die Glieder von $\{b_n\}$, d.h. $|b_n| < K$ für alle n. Es sei n^* die Schwellenzahl, für welche gilt

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K}, \text{ wenn } n > n^*$$

Dann gilt für $n > n^*$ auch: $|a_n \cdot b_n - AB| = |a_n \cdot b_n - A \cdot b_n + A b_n - AB|$

$= |(a_n - A) b_n + A(b_n - B)| < |a_n - A||b_n| + |A| \cdot |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + |A| \cdot |b_n - B|$

Es sei n^{**} diejenige Schwellenzahl für welche $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$, sobald $n > n^{**}$. Nimmt man nun von n^* u. n^{**} das größere, dann ist sowohl $|b_n||a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ wie auch $|A| \cdot |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ also ihre Summe ist kleiner als ε, sobald $n > \max(n^*, n^{**})$.

$\{a_n\}$ u. $\{b_n\}$ konvergent, mit den Grenzwerten A bzw. B und $B \neq 0$, so ist auch die Folge $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ konvergent mit dem Grenzwert $\frac{A}{B}$.

Vor.: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A \wedge \lim\limits_{n \to \infty} b_n = B$

Zu jedem noch so kleinen pos. $\varepsilon > 0$ existiert eine Schwellenzahl n' so, daß $|a_n - A| < \varepsilon$, sobald $n > n'$ und n'' so, daß $|b_n - B| < \varepsilon$, sobald $n > n''$.

<u>Beh.</u>: Es gilt zu jedem noch so kleinen ε eine Schwellenzahl n_0 derart, daß

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon, \text{ sobald } n > n_0.$$

<u>Bew.</u>: $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| = \left|\frac{B(a_n - A) + A(B - b_n)}{b_n B}\right|$

$\leq \left|\frac{\cancel{B}(a_n - A)}{b_n \cancel{B}}\right| + \left|\frac{A(B - b_n)}{b_n B}\right| \leq \left|\frac{a_n - A}{k} + \frac{A(B - b_n)}{kB}\right|$

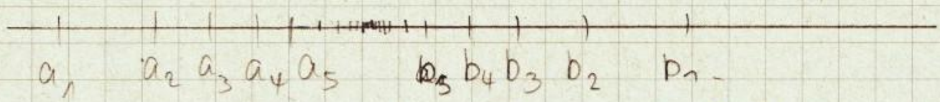
Es sei k eine untere Schranke für $|b_n|$, $k \neq 0$

$= \frac{1}{|k|} |a_n - A| + \left|\frac{A}{kB}\right| \cdot |b_n - B|$ $\quad |a_n - A| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \quad |b_n - B| < \left|\frac{kB}{A}\right| \frac{\varepsilon}{2}$

$< \frac{1}{\cancel{|k|}} \cancel{|k|} \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{\cancel{k \cdot B}}{\cancel{A}}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \left|\frac{\cancel{A}}{\cancel{kB}}\right| = \varepsilon$

sobald n die größere der beiden Schwellenzahlen n' u. n'' überschritten hat. Diese heißt nun n_0.

Eine wichtige Methode zu Grenzwertbestimmungen ist die Intervallschachtelung:



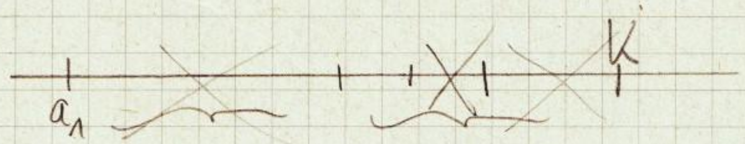
1) Es gibt eine monoton steigende Zahlenfolge $\{a_n\}$
2) " " " " fallende $\{b_n\}$

3) b_n ist $\geq a_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$

Jede monoton steigende (fallende) nach oben (nach unten) beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$



57/15 a) $a_n = \frac{2n+1}{2n} \qquad a_1 = \frac{3}{2} \quad a_2 = \frac{5}{4} \quad a_3 = \frac{7}{6} \quad a_4 = \frac{9}{8}$

Beh.: $a_{n+1} < a_n$

$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)} < \frac{2n+1}{2n}$

$\frac{2n+3}{n+1} < \frac{2n+1}{n}$

$2n^2 + 3n < (2n+1)(n+1)$
$2n^2 + 3n < 2n^2 + 2n + n + 1$
$2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1$
$\underline{\underline{0 < 1}}$

b) $a_n = \frac{n^2-1}{n} \qquad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad a_3 = \frac{8}{3} \quad a_4 = \frac{15}{4}$

$a_{n+1} > a_n$

$\frac{(n+1)^2-1}{n+1} > \frac{n^2-1}{n}$

$n(n+1)^2 - n > (n^2-1)(n+1)$
$n(n^2+2n+1) - n > (n^3+n^2-n-1)$
$n^3 + 2n^2 + \cancel{n} - \cancel{n} > n^3 + n^2 - n - 1$
$n^2 > -n - 1$
$\underline{\underline{n^2 + n + 1 > 0}}$

16a) $a_n = \frac{4n}{8+5n} \qquad$ Beh.: $g = \frac{4}{5}$

$\left| \frac{4n}{8+5n} - \frac{4}{5} \right| < \varepsilon$

$> \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} - \frac{4n}{8+5n} < \varepsilon \quad | \cdot 5(8+5n)$

$32 + 20n - 20n < 40\varepsilon + 50n\varepsilon$

$\frac{32 - 40\varepsilon}{25\varepsilon} < n \qquad \varepsilon = \frac{1}{400}$

$31.9 \cdot 16 = 510.4$

$\underline{\underline{n > \frac{32-40\varepsilon}{25\varepsilon}}}$

b) $b_n = \frac{2n+1}{7-n^2}$

$\left| \frac{2n+1}{7-n^2} \right| < \varepsilon$

von $n=3$ an $\frac{2n+1}{n^2-7}$

$2n+1 < \varepsilon(n^2-7)$

$2n+1 < \varepsilon n^2 - 7\varepsilon$

$0 < \varepsilon n^2 - 2n - 1 - 7\varepsilon$

$0 < \varepsilon\left(n^2 - \frac{2}{\varepsilon}n - \frac{1}{\varepsilon} - 7\right)$

$0 < n^2 - \frac{2}{\varepsilon}n - \frac{1}{\varepsilon} - 7$

$0 < n^2\varepsilon - 2n - 1 - 7\varepsilon$

=0 setzen um Schwellenzahl zu finden

$n^2\varepsilon - 2n - 1 - 7\varepsilon = 0$

$n_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\varepsilon(1+7\varepsilon)}}{2\varepsilon}$

$n_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \varepsilon + 7\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

$\approx \frac{1 \pm 1}{\varepsilon}$

$n_1 \approx 0 \quad n_2 \approx \frac{2}{\varepsilon}$

Seid ihr bekloppt oder was?

57/17 a) $a_n + b_n$

$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \frac{4}{5}$

b) $b_n \cdot d_n$

$\lim_{n \to \infty} (b_n \cdot d_n) = 0$

57/18 a) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{1}}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{(5+n)^2}{25-n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(5+n)^{\cancel{2}}}{\cancel{(5+n)}(5-n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{5+n}{5-n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{5}{n}+1}{\frac{5}{n}-1} = \underline{\underline{-1}}$

19) 1) $a_n: 2 + \frac{n}{2n+1}$ Bew.: $a_n < a_{n+1}$ monoton zunehmend

$\cancel{2} + \frac{n}{(2n+1)} < \cancel{2} + \frac{n+1}{2n+3}$

$2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1$

2) $b_n: 2 + \frac{n+1}{2n+1}$ monoton abnehmend

3) $a_n < b_n \qquad b_n - a_n = \frac{1}{2n+1}$

4) $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

Satz von Bernoulli: $(1+x)^n > 1+nx \qquad n \geq 2 \wedge x > -1 \quad x \neq 0$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = konvergent

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ = Intervallschachtelung?

n	a_n	b_n
1	2	4
2	2.25	3.375
3	2.37	3.16
4	2.44	3.05
5	2.49	2.99

1) a_n wächst monoton? $\quad \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$

$\cancel{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+}$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \underline{\underline{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}} \cdot \frac{n}{n-1}$$

Bernoulli

$(1+x)^n > 1+nx$

$\downarrow$

$-\frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} > \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \qquad \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$$

$\underline{\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1}$ q.e.d.

1 darf ich immer so dreinschwätze

2) Die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ nimmt monoton ab.

Beh.: $\frac{b_{n-1}}{b_n} > 1$

$$\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{\cancel{n^2-1}\; n-1} \cdot \cancel{(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

3) $b_n > a_n \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] > 0 \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} > 0$$

4) $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4$

$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ sobald $n > n \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right| < \left|4 \cdot \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \qquad \frac{4}{n} < \varepsilon$

$\frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \underline{n > \frac{4}{\varepsilon}}$

57/11)

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$

Bsp. für Konvergenz:

$|a_n - g| < \varepsilon$, wenn $n > n_\varepsilon$

$a_n = \frac{n+2}{n} \qquad g = 1 \qquad \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

$3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$ Betragszeichen weglassen, da pos.

$\frac{n+2-n}{n} < \varepsilon \qquad \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{2}{n} < \varepsilon \qquad \underline{\underline{n > \frac{2}{\varepsilon}}}$

$a_n = \frac{n}{2^n}$ Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32} \dots g = 0$

$\varepsilon = \frac{1}{100} \qquad n = 5$

$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \lg\varepsilon = -2 \quad \underline{n = 10}$

$\frac{n}{2^n} < \varepsilon$

$\underline{\lg n - n\lg 2 < \lg\varepsilon}$ ausprobieren

$0.69 \;\; -5\cdot 0.3 < -2$

$1 \;\; -3.010 < -2$

Aufgabe 11) Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n) = 0$

$|c_n + d_n| < \varepsilon$, sobald $n > \underline{n_\varepsilon}$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$: Es gibt ein n_1 derart, daß $|c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, sobald $n > n_1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$: " " " n_2 " , " $|d_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, sobald $n > n_2$

Wählt man $n_\varepsilon = \max(n_1, n_2)$ so gilt

$|c_n + d_n| = |c_n| + |d_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sobald $n > n_\varepsilon$

b, c, d

57/13 mit Hilfe der 0-Folgen (13), 15c,d, 16a,b,c

57/15a) $a_n = \frac{2n+1}{2n}$ $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \dots$ fallend. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$

Beweis, daß die Folge monoton fallend ist.

$$\frac{2n+1}{\cancel{2}n} > \frac{2(n+1)+1}{\cancel{2}(n+1)} \Big| \cdot n(n+1)$$

$$(2n+1)(n+1) > [2(n+1)+1] \cdot n$$

$$\cancel{2n^2} + 2n + n + 1 > \cancel{2n^2} + 3n$$

57/11b) $c_n - d_n$ Vor.: $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$

Beh.: $\lim_{n\to\infty} (c_n - d_n) = 0$

57/15c) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$ $\to 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n > \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$n \lg 2 - n \lg 3 > (n+1) \lg 2 - (n+1) \lg 3$$

$$\cancel{n \lg 2} - \cancel{n \lg 3} > \cancel{n \lg 2} + \lg 2 - \cancel{\lg 3} - \lg 3$$

$$\underline{\underline{0 > -0.17609126}}$$

d) $a_n = \frac{2n^2+3}{5n^2+6}$ $\frac{5}{11}, \frac{11}{26}, \frac{21}{51}, \frac{35}{86}, \frac{53}{131}, \frac{75}{186}, \frac{101}{251}$

$\approx 0.45, \approx 0.42, \approx 0.41, \approx 0.407, \approx 0.4046, 0.4032, 0.402$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.4$$

$$\frac{2n^2+3}{5n^2+6} > \frac{2(n+1)^2+3}{5(n+1)^2+6}$$

$$(2n^2+3) \cdot [5(n+1)^2+6] > [2(n+1)^2+3] \cdot [5n^2+6]$$

$$\cancel{10n^2(n+1)^2} + 12n^2 + 15(n+1)^2 \cancel{+18} > \cancel{10n^2(n+1)^2} + 12(n+1)^2 + 15n^2 \cancel{+18}$$

$$12n^2 + 15(n^2+2n+1) > 12(n^2+2n+1) + 15n^2 \Rightarrow \cancel{12n^2} \cancel{+15n^2} + 30n + 15 > \cancel{12n^2} + 24n + 12 \cancel{+15n^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{6n+3 > 0}}$$

57/16a) $a_n = \frac{4n}{8+5n}$ $\frac{4}{13}, \frac{8}{18}, \frac{12}{23}, \frac{16}{28}, \frac{20}{33}, \frac{24}{38}$ $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{5}}}$ ✓

$\frac{8}{18} \Downarrow \frac{4}{9}$

b) $b_n = \frac{2n+1}{7-n^2}$ $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{-n} \to 0}}$

c) $c_n = \frac{6-n}{4n-5}$ $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{-n}{4n} \to -\frac{1}{4}}}$ ✓ $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ $\underline{\underline{d_n = \frac{n^2+3}{2n+3}}}$

57/17a) auch gg. $\frac{4}{5}$

b) $\frac{2n+1}{7-n^2} \cdot \frac{n^2+3}{2n+3} = \frac{2n^3+n^2+6n+3}{-2n^3-3n^2+14n+21} = \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{-2-\frac{3}{n}+\frac{14}{n^2}+\frac{21}{n^3}} \to \frac{2}{-2} = -1$

$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} b_n \cdot d_n = -1}}$

d) $a_n : d_n$ $\frac{4n}{8+5n} \cdot \frac{2n+3}{n^2+3} = \frac{8n^2+12n}{5n^3+8n^2+15n+24} = \frac{\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}}{5+\frac{8}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{24}{n^3}} = \frac{0}{5} = 0$

$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} (a_n : d_n) = 0}}$

57/19) a_n monoton steigt
b_n " fällt
so daß $a_n < b_n$ $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$

$a_n: 2+\frac{n}{2n+1}$ $2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{5} \dots$ $b_n: 2+\frac{n+1}{2n+1}$ $2\frac{2}{3}, 2\frac{3}{5} \dots$

1) Beh.: $2+\frac{n}{2n+1} < 2+\frac{n+1}{2(n+1)+1}$ 2) Beh.: $2+\frac{n+1}{2n+1} > 2+\frac{n+2}{2n+3} \quad |-2$

Bew.: $\frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3}$

$n(2n+3) < (n+1)(2n+1)$

$\cancel{2n^2}+3n < \cancel{2n^2}+3n+1$

$\underline{3n < +3n+1}$

Bew.: $\frac{n+1}{2n+1} > \frac{n+2}{2n+3}$

$(n+1)(2n+3) > (n+2)(2n+1)$

$\underline{\underline{2n^2+5n+3 > 2n^2+5n+2}}$

3)
Beh
Be
4
44

3)

Beh.: $a_n < b_n$

$$2+\frac{n}{2n+1} < 2+\frac{n+1}{2n+1}$$

Bew.: $\frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+1}$

$$\underline{\underline{n < n+1}}$$

4) Beh.: $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Bew.:

$$2+\frac{n}{2n+1} - 2 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

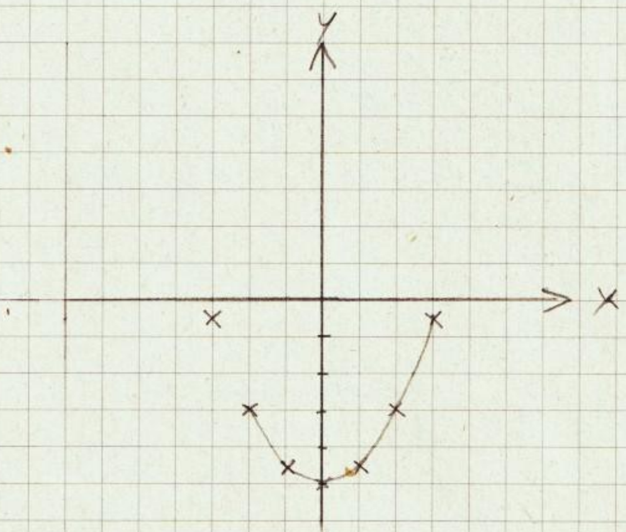
$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0}}$$

44/16 a)

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5$$

$$-2 \leqq x \leqq 3$$

x	y
-2	-3
-1	$-4\frac{1}{2}$
0	-5
1	$-4\frac{1}{2}$
2	-3
3	$-\frac{1}{2}$

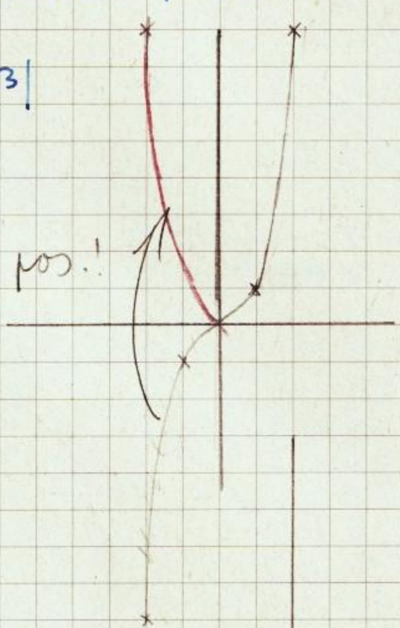


44/17a) Def.-Bereich $\mathbb{R}$

Werte Bereich pos. $\mathbb{N}$

$$y = |2x|$$

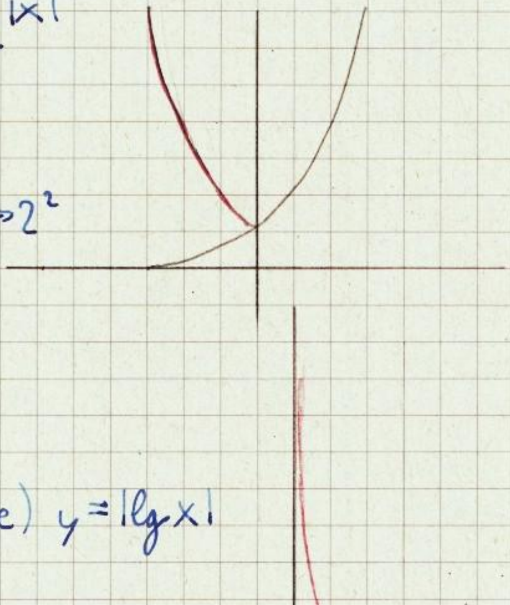
b) $y = |x^3|$



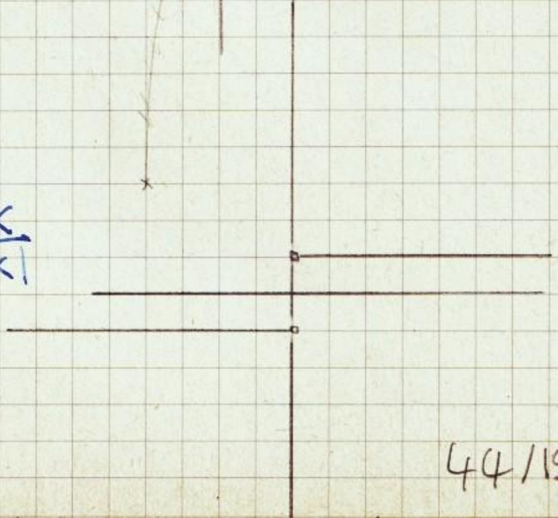
c) $y = 2^{|x|}$

$x = -2$

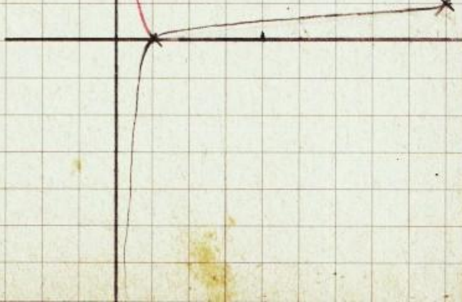
$\Rightarrow y = 2^{|-2|} \Rightarrow 2^2$



d) $y = \frac{x}{|x|}$



e) $y = |\lg x|$

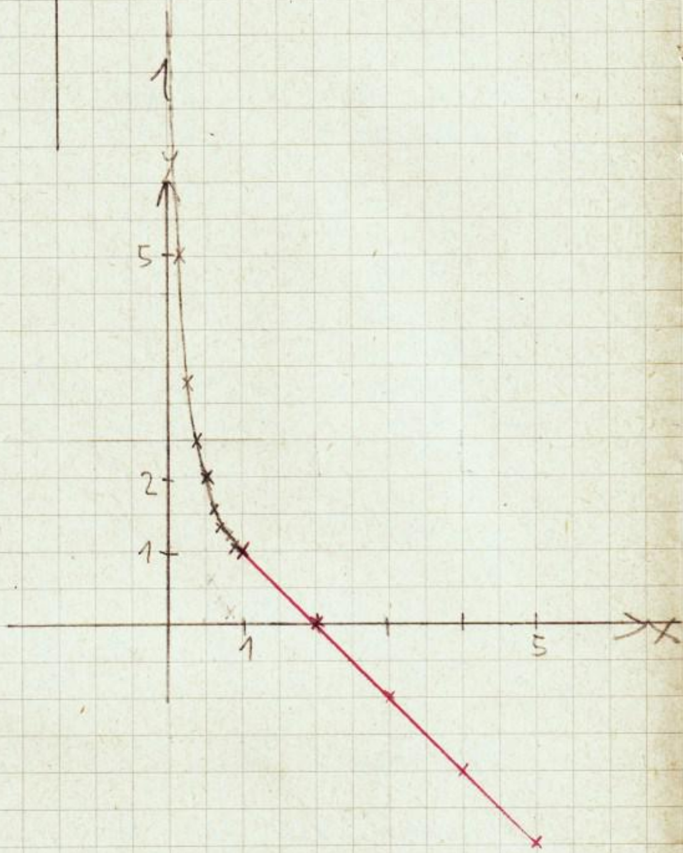


44/19ab

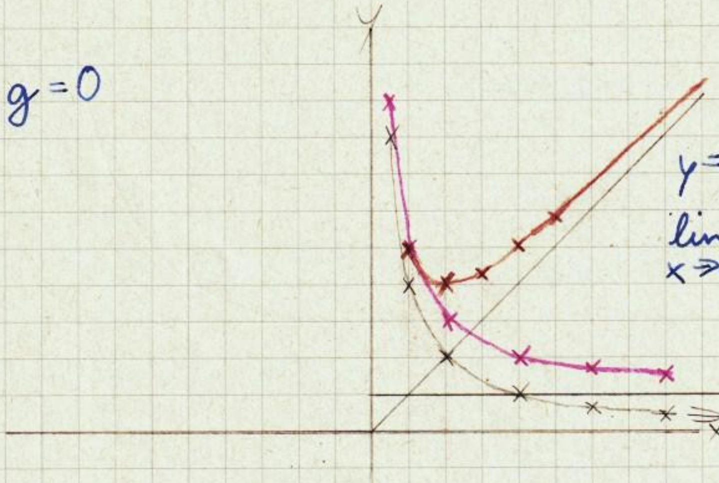
44/19a) $y = \begin{cases} x^2 \text{ für } x \leqq 0 & 1 \\ x \text{ für } x > 0 & 2 \end{cases}$

44/19b)

$y \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ für } 0 < x \leqq 1 & 1 \\ 2-x \text{ für } 1 < x \leqq 5 & 2 \end{cases}$



$y = \frac{4}{x} \quad g = 0$



$y = \frac{4}{x}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+4}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+4}{x} =$

$\lim\limits_{x \to \infty} x\left(x + \frac{4}{x}\right) =$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

60/2b)

$$\left|\frac{x}{x+1}-1\right| < \frac{1}{500}$$

$$\left|\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right|$$

$$\left|\frac{-1}{x+1}\right| < \frac{1}{500}$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{500}$$

$$x+1 \geqq 500$$

$$\underline{\underline{x \geqq 499}}$$

c)

$$\left|\frac{3x-2}{x-2}-3\right| < \frac{1}{500}$$

$$\left|\frac{3x-2}{x-2}-\frac{3x-6}{x-2}\right| < \frac{1}{500}$$

$$\left|\frac{4}{x-2}\right| < \frac{1}{500}$$

$$\frac{4}{x-2} < \frac{1}{500}$$

$$x-2 > 2000$$

$$\underline{\underline{x > 2002}}$$

60/6a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x}{2+x}=-1$ Beh.: $g=-1$

Beh.: $\left|\frac{4-x}{2+x}+1\right|<\varepsilon$

Bew.: $\left|\frac{4-x}{2+x}+\frac{2+x}{2+x}\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{6}{2+x}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{6}{2+x}<\varepsilon$$

$$2+x > \frac{6}{\varepsilon}$$

$$\underline{\underline{x > \frac{6}{\varepsilon}-2}}$$

5ab, 6d

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2-1}$ Beh.: $g=\frac{2}{5}$

$$\left|\frac{2x^2+3}{5x^2-1}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^2+3}{5x^2-1}-\frac{10x^2-2}{25x^2-5}\right|$$

$$\cancel{\frac{2x^2+3-10x^2+2}{5x^2-1-25x^2+5}}$$

$$\cancel{\left|\frac{-8x^2+5}{-20x^2+4}\right|}<\varepsilon$$

$$\left|\frac{10x^2+15}{25x^2-5}-\frac{10x^2-2}{25x^2-5}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{17}{25x^2-5}<\varepsilon$$

$$\frac{25x^2-5}{17}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$x^2>\left[\frac{17}{\varepsilon}+5\right]\frac{1}{25}$$

$$x<-\sqrt{\left(\frac{17}{\varepsilon}+5\right)\frac{1}{25}}$$

60/5a) $f(x) = \frac{x^3}{8}$ $\varepsilon = 120$ ~~herausfinden~~ $n_0 = 5$

$$|f(x) - g| < \varepsilon \quad \frac{x^3}{8} \geq 120 \quad \underline{\underline{x_\varepsilon \geq 9.8648483}}$$

b) $f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$ $\quad \varepsilon = 120$

$$\frac{1-x^2}{1-x} \geq 120$$

$$1 - x^2 \geq 120 - 120x \qquad \underline{\underline{x \geq 119}}$$

$$-x^2 + 120x - 119 = 0$$

$$x^2 - 120x + 119 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 119}}{2} = \frac{120 \pm 118}{2} \begin{cases} \underline{\underline{119}} \\ 1 \text{ unmöglich} \end{cases}$$

60/6d) $\cancel{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{4x^2+20x+25} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{4 + \frac{20}{x} + \frac{25}{x^2}}}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x+5} = \frac{1}{4}}$ $\qquad \underline{\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+5} = \frac{1}{2}}}$

Beweis: $\left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

Inhalt neg.

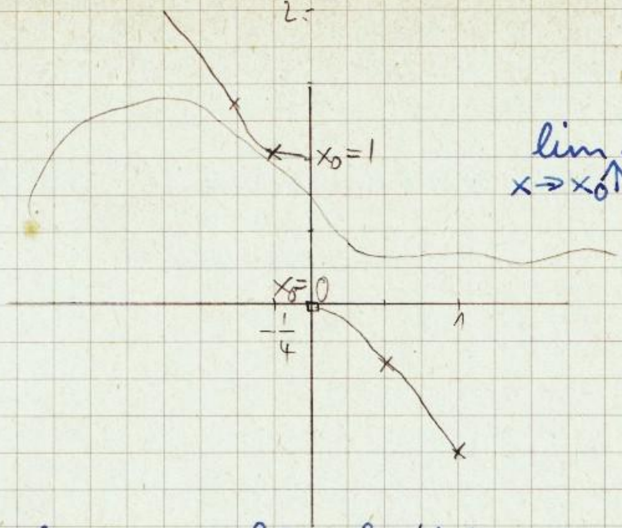
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+5} < \varepsilon$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+5} > -\varepsilon + \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2+4}{4x^2+20x+25} > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2$$

$$x^2\left[1 - 4\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2\right] - x \cdot 20\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2 + 4 - 25\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2 > 0$$

$y = \frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$

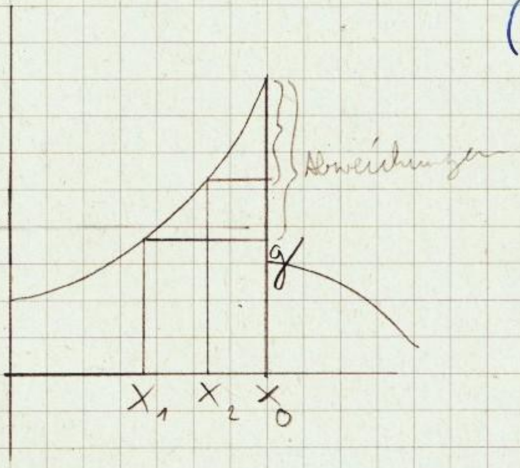


$\lim\limits_{x \to x_0 \uparrow} f(x) = g$

Def.: Die Funktion $y=f(x)$ besitzt an der Stelle $x=x_0$ den linksseitigen (rechtsseitige) Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl δ gilt derart, daß

$$|f(x)-g| < \varepsilon \text{, sobald } x_0 - x < \delta \text{ und } x \neq x_0$$

$$(x - x_0 < \delta)$$



$y = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ $\quad x=1 \to f(1)$ existiert nicht

$f(1.01) = -1.512$

$f(1.001) = -1.501$

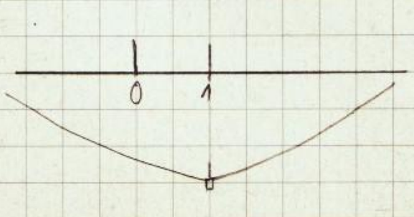
$\lim\limits_{x \to 1 \downarrow} f(x) = -1.5$

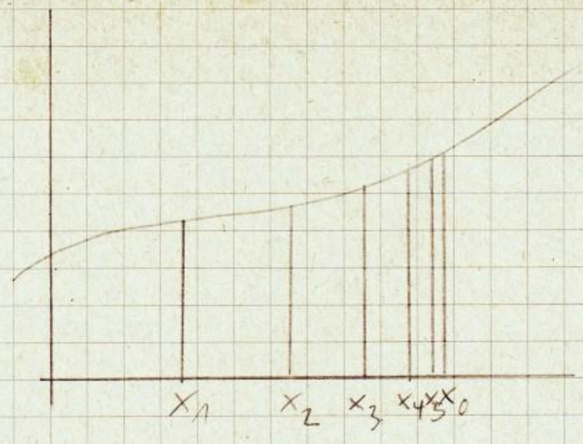
$f(0.9) = -1.38$

$f(0.99) = -1.49$

$f(0.999) = -1.498$

$\lim\limits_{x \to 1 \uparrow} f(x) = -1.5$

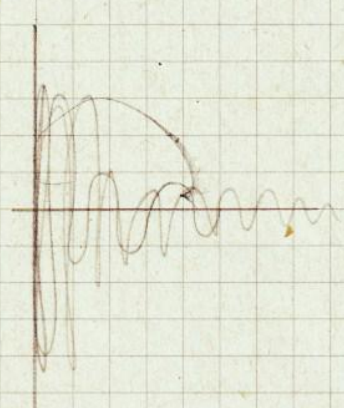




$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ ...
können konvergente Zahlenfolge bilden, müssen aber nicht

Bsp.: $y = \sin\frac{1}{x}$

x	0.09	0.08	0.07	0.06	0.009	0.008	0.001	0.0001
y	0.1927	0.216...	0.2468	0.9848	0.9329	0.8192	-0.9848	-0.9848



Grenzwertbestimmungen:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = ? \qquad x = 1-h \quad \lim_{x\to\infty} h = 0 \quad (h>0)$$

$$\frac{(1\mp h)^2-1}{(1\mp h)^2-3(1\mp h)+2} = \frac{1\mp 2h+h^2-1}{1\mp 2h+h^2-3\pm 3h+2} = \frac{\mp 2h+h^2}{\pm h+h^2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mp 2h+h^2}{\pm h+h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\mp 2+h}{\pm 1+h} = -2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \text{existiert } f \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \text{existiert } g\end{array}\right\} \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right] \to f \pm g$$

64/13b $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+6}{2x^2-7}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{n^2-2n+6}{2n^2-7}$ n = nur ganze Zahlen

61, 62, 63, 64 lesen

$\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ $x = 1-h$

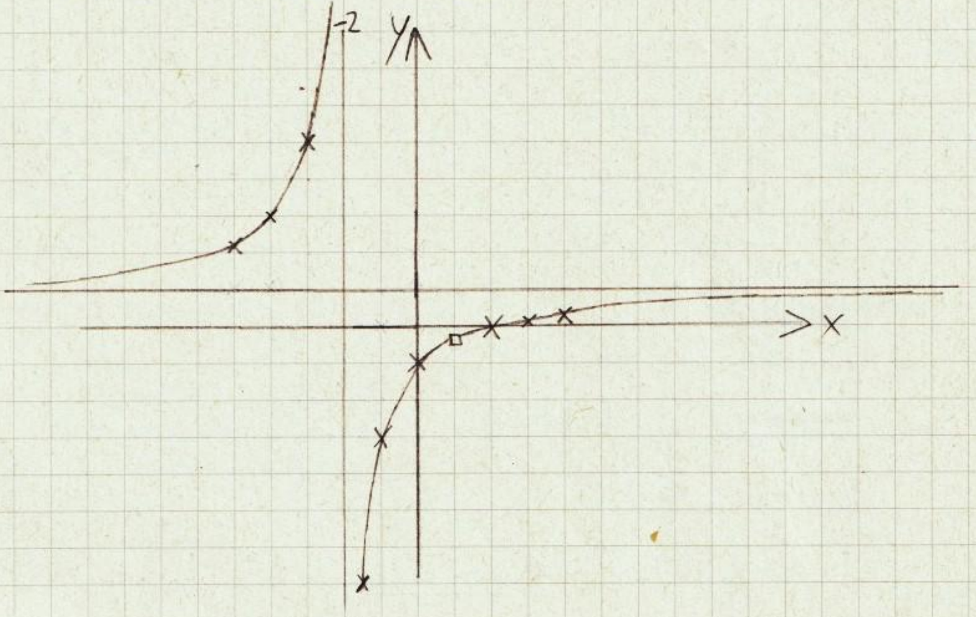
$$\frac{(1-h)^2-3(1-h)+2}{(1-h)^2+1-h-2} = \frac{\cancel{1}-2h+h^2\cancel{-3}+3h+\cancel{2}}{\cancel{1}-2h+h^2+1-h-\cancel{2}} = \frac{h^2+h}{h^2-3h} = \frac{1+h}{h-3} \Rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$\frac{(1+h)^2-3(1+h)+2}{(1+h)^2+1+h-2} = \frac{\cancel{1}+2h+h^2\cancel{-3}-3h+\cancel{2}}{\cancel{1}+2h+h^2+1+h-\cancel{2}} = \frac{h^2-h}{h^2+3h} \Rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}$$

x	y
0	-1
-1	-3
2	0
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{3}$



63/9a) $\lim\limits_{x \to 1.5} \frac{4x^2-9}{2x-3} = 6$

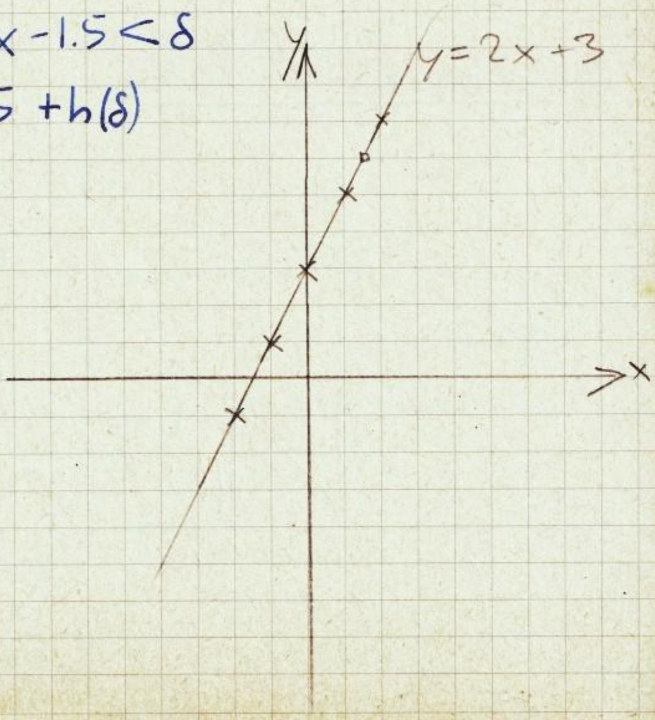
$$\left| \frac{4x^2-9}{2x-3} - 6 \right| < 0.01 \quad \text{sobald } x - 1.5 < \delta$$

$$x = 1.5 + h(\delta)$$

$$\left| \frac{(2x+3)\cancel{(2x-3)}}{\cancel{2x-3}} - 6 \right| = |2x+3-6| < 0.01$$

$$|2(1.5+\delta)-3| = |\cancel{3}+2\delta\cancel{-3}| < 0.01$$

$$\underline{\underline{|\delta| < 0.005}}$$



63/9b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+2} = 0$

$\left|\frac{x^2}{x^2+2}\right| < 0.01$ sobald $x < \delta \wedge \delta > 0$

$\left|\frac{\delta^2}{\delta^2+2}\right| < 0.01$

$\delta^2 < 0.01(\delta^2+2)$

$\delta^2 < 0.01\delta^2 + 0.02$

$0.99\delta^2 < 0.02$

$\delta^2 < \frac{0.02}{0.99}$

$\delta < \sqrt{\frac{0.02}{0.99}} = 0.14213387$

9c

13abcde

63/9c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1-x^2}{x+1} = 2$

$\left|\frac{1-x^2}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{x+1}} - 2\right| < \varepsilon$

$|1-x-2| < \varepsilon$

$|2-1+x| < 0.01$

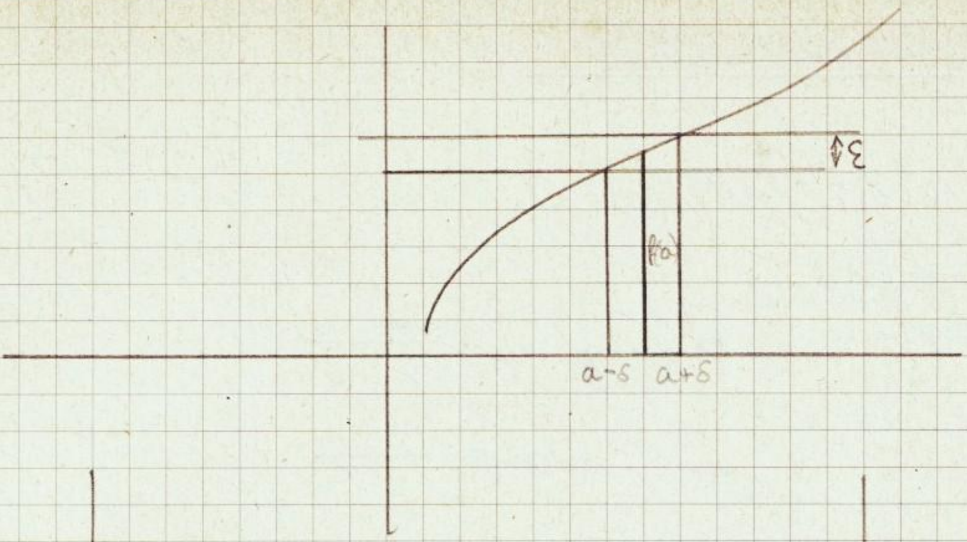
$1+x < 0.01 \Rightarrow \underline{\delta < 0.01}$

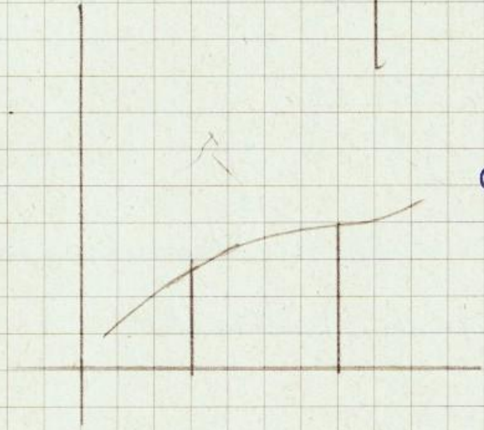
64/13b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $+\infty$ e) -32

Definition der Stetigkeit

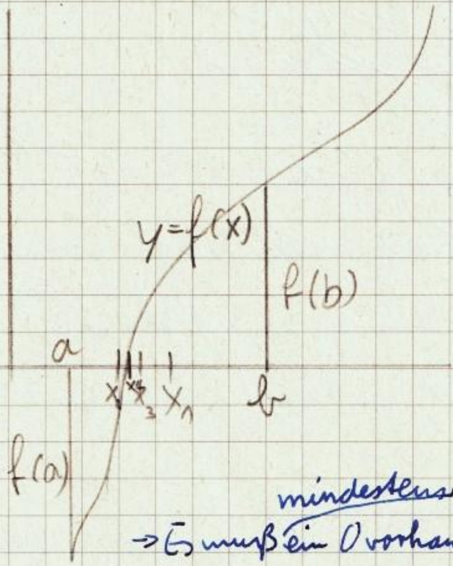
$f(x)$ existiert bei $\underline{x = a}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = g \\ \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = g \end{array}\right\} f(a) = g$$



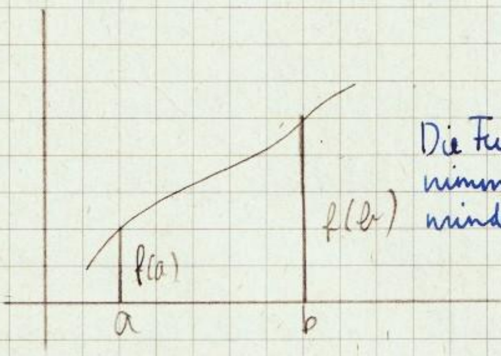


offenes Intervall



$\rightarrow$ Es muß ~~ein~~ mindestens ein 0 vorhanden sein.

Beweis durch Halbieren

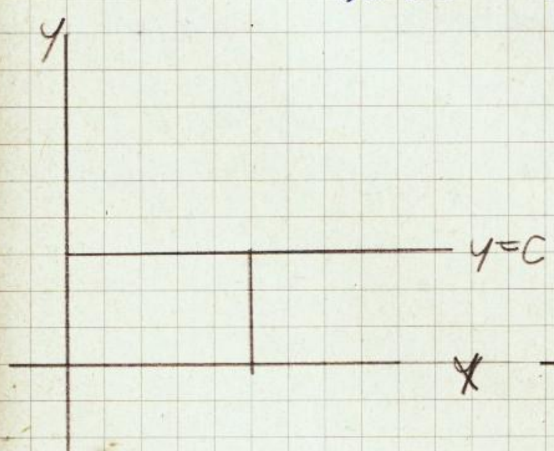


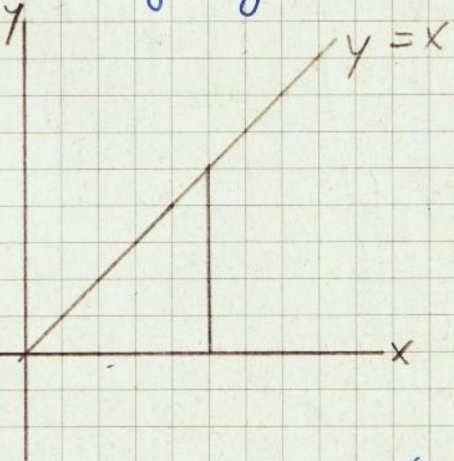
Die Funktion zw. $f(a)$ u. $f(b)$ nimmt jeden Zahlenwert mindestens einmal an.

Funktion stetig, wenn linker und rechter Grenzwert gleich ist

" der Grenzwert gleich dem Funktionswert ist

Die Stelle mit dem Grenzwert muß definiert sein.



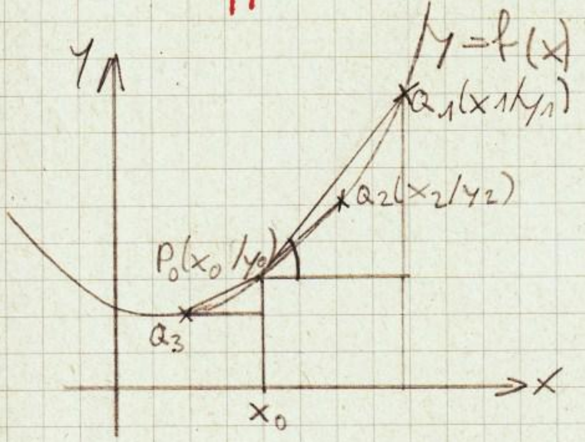


$$\left.\begin{array}{l} y = x + c \\ y = cx \\ y = cx + d \\ y = cx^2 + dx \end{array}\right\} \text{alle auch stetig}$$

Steigung einer Funktion nur bei stetigen möglich (tan des ∢).

Die Steigung einer (stetigen) Funktion

Die Differentialrechnung



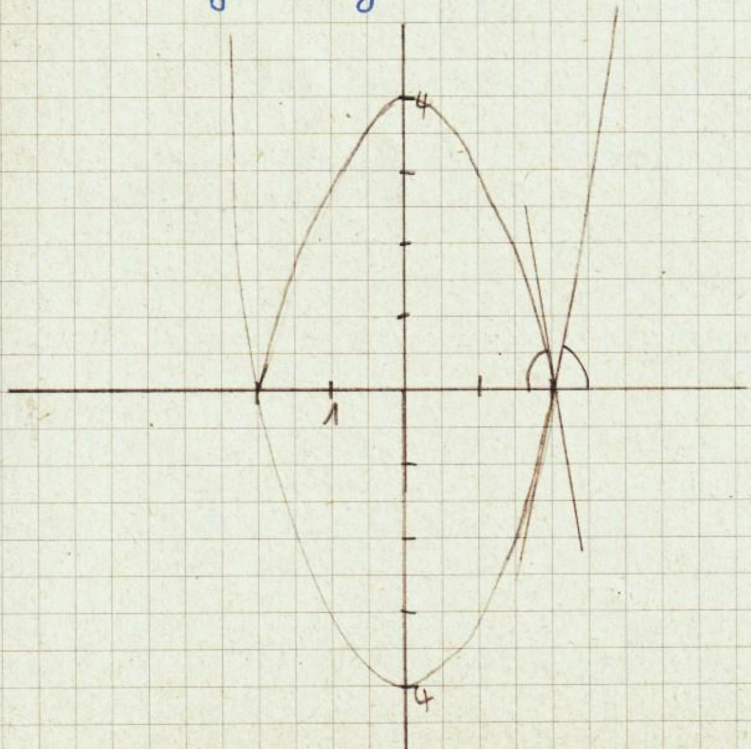
Steigung $m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$m_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$

$m_3 = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$

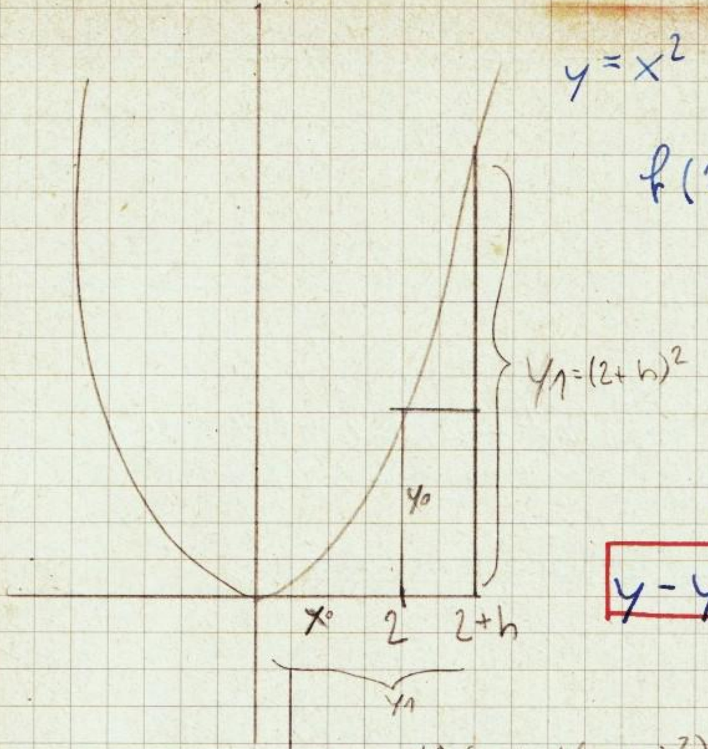
Errichtet man durch einen Punkt $P_0(x_0/y_0)$ einer Funktionskurve eine Sehne s_1, welche die Kurve noch in $Q_1(x_1/y_1)$ schneidet, so gehört zu dieser Sehne eine Steigung $m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Ebenso kann man verfahren für eine zweite, dritte usw. Sehne. Die Steigungen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bilden eine Zahlenfolge. Ist diese konvergent, so nennen wir ~~eine~~ den Grenzwert dieser Steigungen die Steigung der Funktion in P_0. Liegen alle Punkte Q_n rechts von P_0, so ist der Grenzwert ein rechtsseitiger, liegen alle links, so ist der Grenzwert ein linksseitiger.



$y = |x^2 - 4|$

Sind diese beiden gleich, so soll dieser Grenzwert die Steigung der Funktion $y = f(x)$ bei x_0 heißen.



$y = x^2$

xy^2

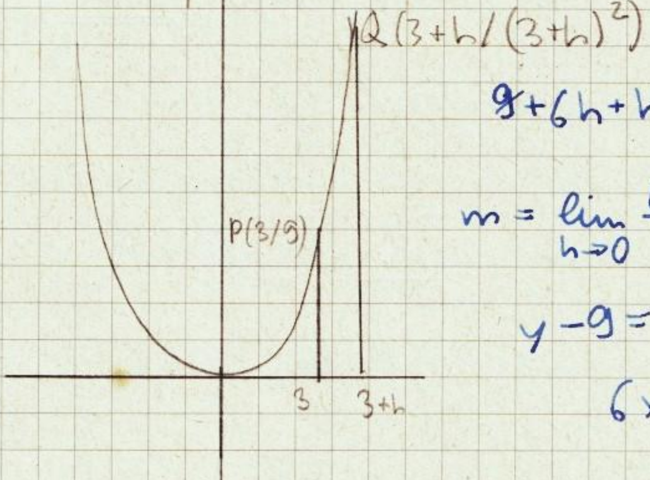
$f(2+h) = 4 + 4h + h^2$

$m = \dfrac{\overbrace{4 + 4h + h^2}^{y_1} - \overbrace{4}^{y_0}}{\underbrace{h}_{x_1 - x_0}}$

$= 4 + h$

$\lim\limits_{h \to 0} (4+h) = 4$

$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$



$9 + 6h + h^2 - 9$

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6h + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (6+h) \quad m = 6$

$y - 9 = 6(x - 3)$

$6x - y - 9 = 0$

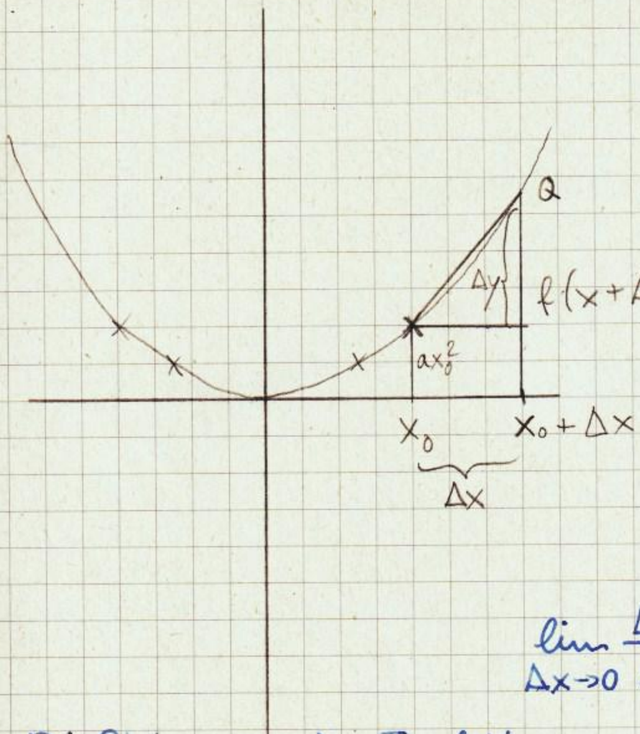
$y = 6x - 9 \quad y = x^2$

Tangente
Die Gerade schneidet die Funktion, wenn

$x^2 = 6x - 9$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad x = 3$

Die Steigung der Kurve $y = ax^2$ bei einem beliebigen $x = x_0$



$$f(x+\Delta x) = a(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x_x^2)$$
$$a(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x - x_0^2)$$
$$\Delta y = \cancel{ax_0^2} + 2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 - \cancel{ax_0^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax_0 + a\Delta x) = \underline{\underline{2ax_0}}$$

Die Steigung der Funktion $y = ax^2$ an der Stelle x_0 ist: $m = 2ax_0$
Dies gilt an jeder Stelle, also für jeden Wert von x. Die Steigung der Funktion $y = ax^2$ „wird also durch die Funktion $\boxed{y = 2ax}$ „geliefert".

für $y = 7.5x^2$ ist die Steigung an einer beliebigen Stelle
$m = 15x \rightarrow y = 15x$

Die Funktion $y = 2ax$ heißt Ableitungsfunktion oder Ableitung von $y = ax^2$; und diese ist die Stammfunktion von $y = 2ax$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Diff. der y-Werte}}{\text{Diff der x-Werte}}$ = Quotient der Differenzen

! $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dy}$ Differentialquotient

Die Ableitung für $y = ax^n$ $(a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a \frac{\cancel{x^n} + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n \cancel{- x^n}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a\Big(n \cdot x^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots}_{\text{streben gegen 0}}\Big) = \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{a \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{wenn } y = ax^{1-1} \Rightarrow a \cdot 1 \cdot x^0 \Rightarrow a \\ (ax^n)' = n \cdot a \cdot x^{n-1} \end{array}}$$

79/5) a) $y = 4x^3$ $\quad y' = 12x^2$

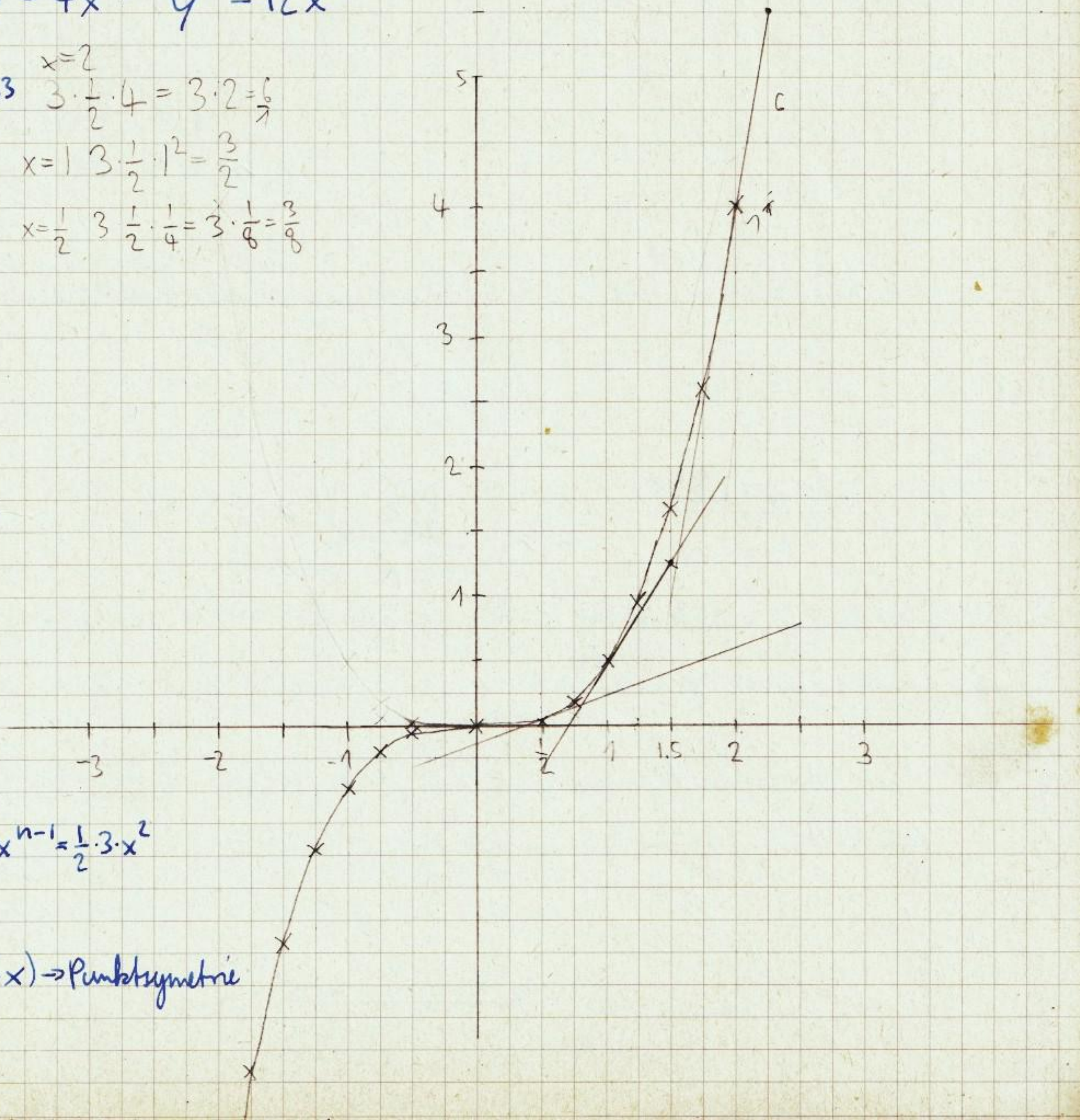
79/10a) $y = \frac{1}{2}x^3$

$x=2$: $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 3 \cdot 2 = 6$

$x=1$: $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{3}{2}$

$x=\frac{1}{2}$: $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

x	y
1	$\frac{1}{2}$
0	0
-1	$-\frac{1}{2}$
2	4
3	13.5
$\frac{1}{2}$	0.0625
$\frac{3}{4}$	0.210..
1.5	1.6875
1.25	0.976...
1.75	2.67...



Steigung: $t = anx^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x^2$

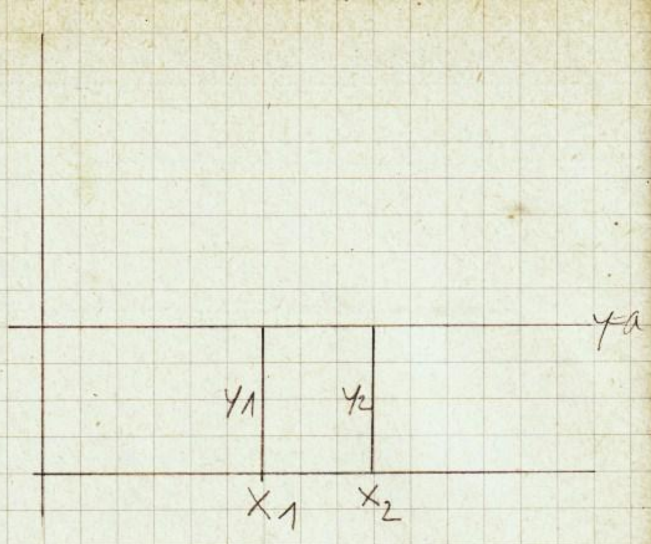
$t_2 = 6$

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie

$y=a$ konstant. Abweichung?

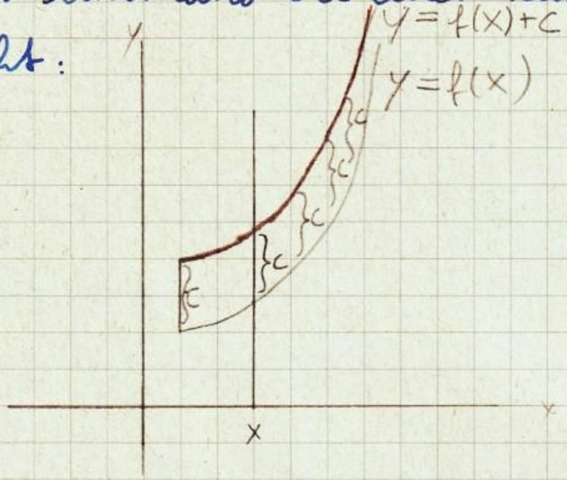
$y' = |a \quad y'=0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \underline{0}$$



Abweichung der konstanten Funktion = 0

Ein konstanter Summand bei einer Funktion beeinflußt deren Ableitung nicht:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} =$$

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{[f(x_2)+c]-[f(x_1)+c]}{x_2 - x_1} =$$

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$$

Ein konstanter Faktor wird bei der Ableitung beibehalten.

__Beh.:__ $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

__Bew.:__ $$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{c\, f(x_2) - c\, f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} c\, \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = c \cdot f'(x_1)$$

Sind $f(x)$ und $g(x)$ ableitbare Funktionen an der Stelle $x = x_0$, so ist hier auch ihre Summe $f(x) + g(x)$ ableitbar, und es gilt: $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

__Bew.:__ Nach Vorraussetzung sind die Zahlenfolgen $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und $\frac{g(x_0+h)-g(x)}{h}$ konvergent für $h \to 0$, d.h. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$, $(f'(x))$

existiert, ebenso $\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$, $(=g'(x))$

Folglich existiert auch

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] =$$

$f'(x_0)+g'(x_0)$

$y=x \quad y'=1$ $\qquad y=ax^2+bx+c \quad y'=2ax+b$

$y=ax \quad y'=a$ $\qquad y=15x^7+6x^4+3x^2+x-1 \quad y'=105x^6+24x^3-6x+1$

$y=x^2 \quad y'=2x$

$y=ax^2 \quad y'=2ax$

$y=ax^n \quad y'=n\cdot a\cdot x^{n-1}$

$y=5x^3-12x^2+x-1 \quad y'=15x^2-24x+1 \quad y''=30x-24 \quad y'''=30 \quad y^{IV}=0$

$$\boxed{\text{Def.: } \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}=f'(x_0)}$$

77/11) $y=\frac{1}{8}x^2$ a) Steigung 1.5 wann? b) -0.5

$y=ax^2$
$y'=2ax$ $\quad 1.5=\frac{1}{4}x^2 \quad x=\sqrt{6}$ $\qquad -0.5=\frac{1}{16}x^2 \quad x=i\sqrt{8}$

79/11 a) $y=x^2 \quad x_1=1.5 \quad y_1=2.25 \quad y'=2x \quad m=3$

$P(1.5/2.25)$ $\qquad y-y_1=m(x-x_1)$

$y-2.25=3(x-1.5)=3x-4.5$

$\underline{\underline{3x-y-2.25=0}}$

b) $y=0.4x^2 \quad x_1=-2 \quad y_1=1.5 \quad y'=0.8x \quad m=-1.6$

$\cancel{(x-x_1)=m(y-y_1)}$ $\quad y-y_1=m(x-x_1)$

$\cancel{x+2=-1.6(y-1.5)}$ $\quad y-1.5=-1.6(x+2)=-1.6x-3.2$

$\underline{\underline{1.6x+y+1.6=0}}$

e) $y=-\frac{1}{5}x^3 \quad x_1=2.5 \quad y_1'=-\frac{3}{5}x^2=-3.75 \quad m=-3.75$

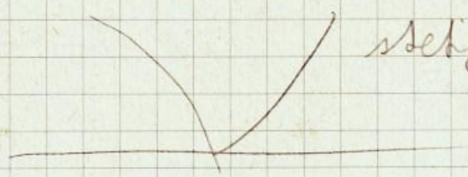
$P(2.5/-3.125)$ $\qquad y+3.125=-3.75(x-2.5)$

$y+3.125=-3{,}75x+9.375$

$\underline{\underline{3.75x+y-5.625=0}}$

Voraussetzung: $y = f(x)$ ist differenzierbar an der Stelle $x = x_1$

Beh.: $y = f(x)$ ist stetig an der Stelle $x = x_1$



stetig, aber nicht differenzierbar.

Bew.: Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1)$$

$$\left| \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} - f'(x_1) \right| < \varepsilon \text{ sobald der Betrag von } h < \delta$$

$$\left| \underbrace{f(x_1+h) - f(x_1)}_{\to 0} - \underbrace{|h| \cdot f'(x_1)}_{\to 0} \right| < \underbrace{\varepsilon |h|}_{\to 0}$$

Fällt so ist $f'(x_0) < 0$

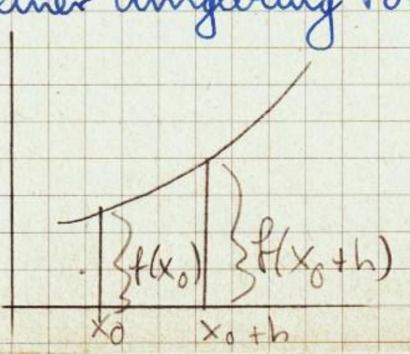
Steigt die Funktion (eine differenzierbare) $y = f(x)$ an der Stelle x_0, so ist $f'(x_0) > 0$.

Bew.: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}{h}$ soll pos. sein.

D.h. für fast alle h-Werte wird $\frac{f(x_0+h) - f x_0}{h} > 0$ sein.
also für $h > 0$ muß $f(x_0+h) > f(x_0)$
für $h < 0$ muß $f(x_0+h) < f(x_0)$

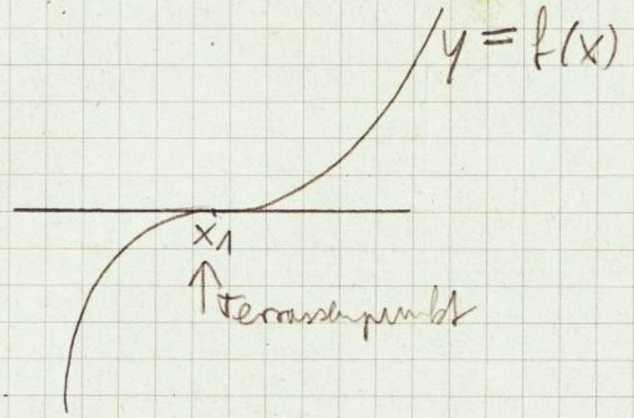
Umgekehrt: Steigt eine Funktion bei $x = x_0$, so ist $f(x_0) > 0$.

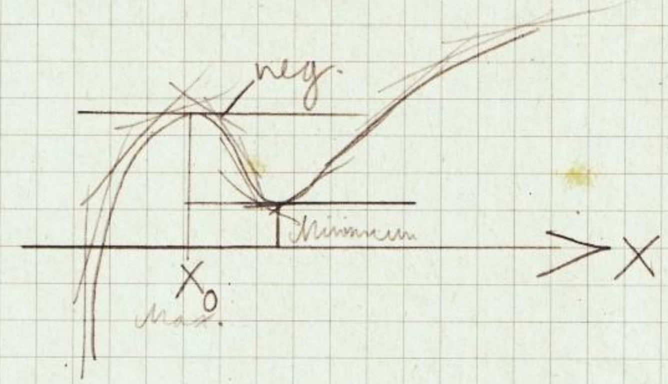
Bew.: Daß die Funktion bei x_0 steigend hindurchgeht, bedeutet, daß in einer Umgebung von x_0 $f(x_0+h) > f(x_0)$ für $h > 0$
$f(x_0+h) < f(x_0)$ für $h < 0$



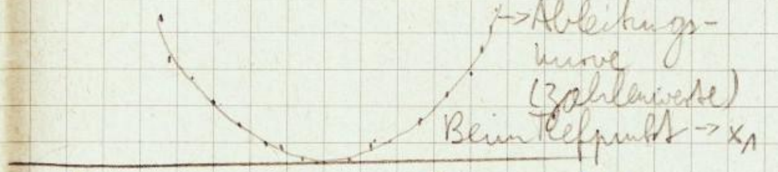
Folglich werden Zähler u. Nenner vom gleichen Vorzeichen in $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

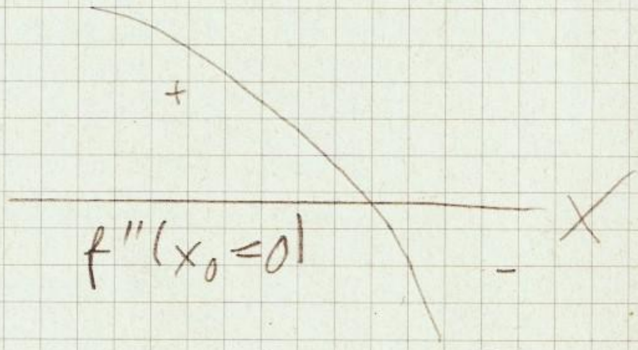
Gilt an einer Stelle x_0 $f(x_0) = 0$, so besitzt die Funktionskurve bei x_1 eine horizontale Tangente.



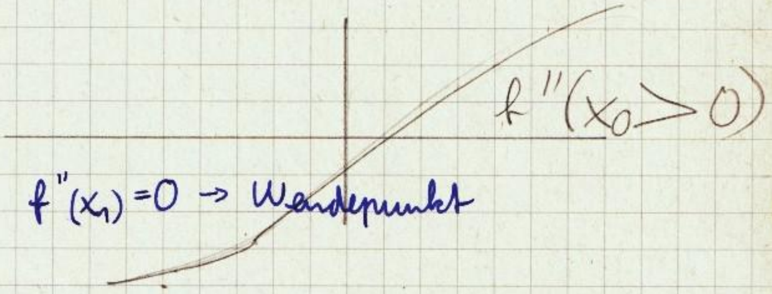


Die Werte der ersten Ableitung





nehmen zuerst ab, nachher zu (od. umgekehrt).
Bei x_0 besitzt die erste Ableitung eine horizontale Tangente, also die zweite Ableitung $f''(x_0) = 0$



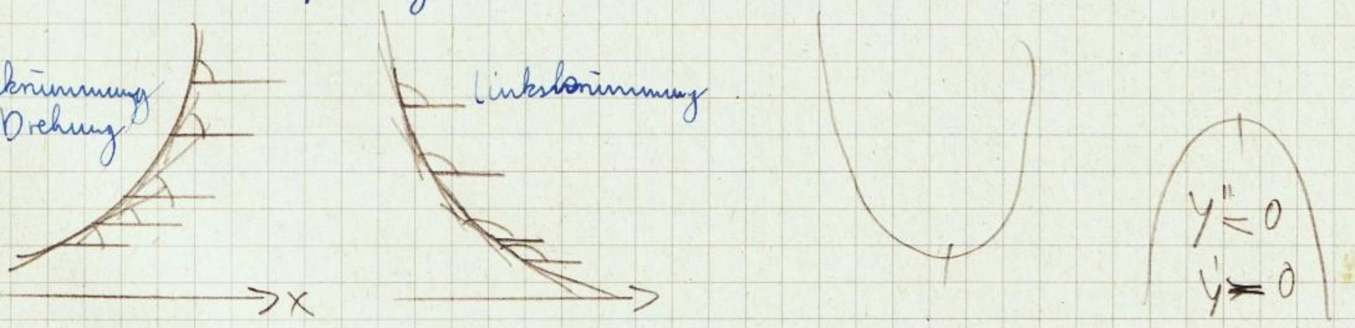
$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) > 0 \rightarrow$ Minimum

$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0 \rightarrow$ Maximum

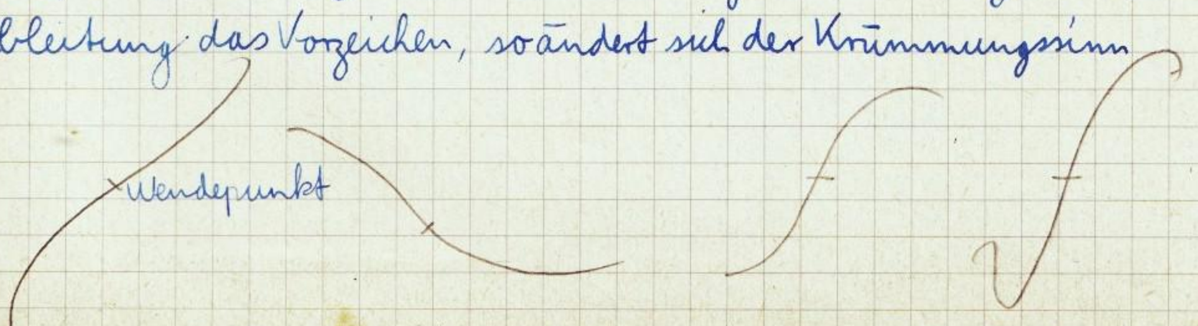
$f''(x_1) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt

100

$y'' > 0$ bedeutet: y' steigt



$y'' < 0$, die Kurventangente dreht sich in neg. Drehrichtung. Wechselt die zweite Ableitung das Vorzeichen, so ändert sich der Krümmungssinn



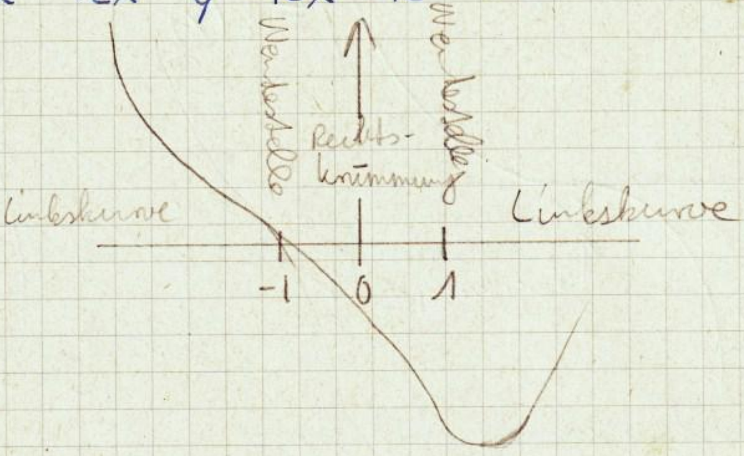
Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heißt Terrassenpunkt.

106/8) a) $y = x^2 - 4x$ $y' = 2x - 4$ $y'' = 2$ ⇒ Linkskurve

b) $y = x^4 - 6x^2$ $y' = 4x^3 - 12x$ $y'' = 12x^2 - 12$

$12x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 1$ $x = \pm 1$



$y' = 4x^3 - 12x$

$4x(x^2 - 3) = 0$

$x = 0$ Maximum

$x = \pm\sqrt{3}$

9 b) $y = x^4 - 4x^2$ $y' = 4x^3 - 8x$ $4x^3 - 8x = 0$

$y'' = 12x^2 - 8$ rechtsk. $4x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

Max.   Minima

$H(0/0)$ $T_1(-\sqrt{2}/-4)$

$T_2(\sqrt{2}/-4)$

106/10) a) $y = x^2 - \frac{1}{3}x^2$

$y' = 2x - x^2 \equiv \to m$

$y'' = 2 - 2x$

$2 - 2x = 0$ $x = 1$ $W\left(1/\frac{2}{3}\right)$ $m = 1$

b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$

$y' = x^3 - 6x$

$y'' = 3x^2 - 6$ $3x^2 - 6 = 0$

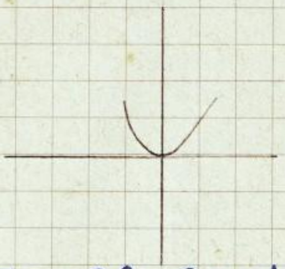
$x^2 = 2$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$

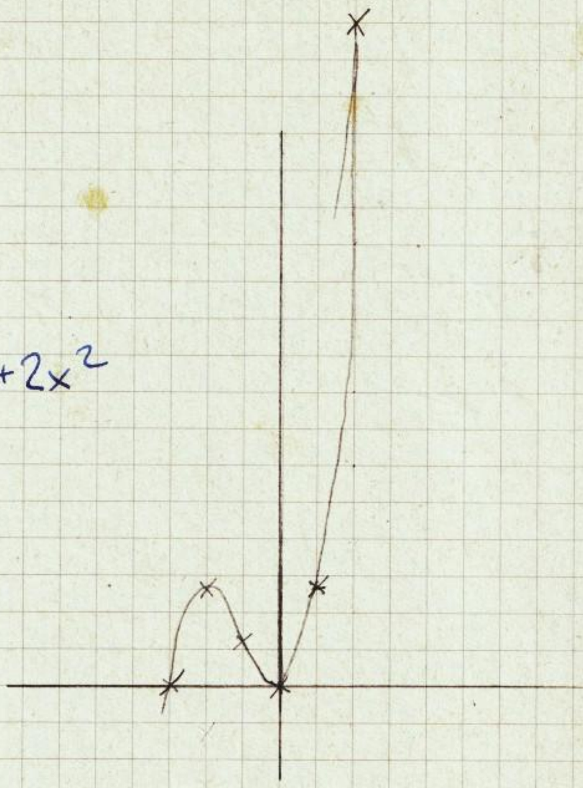
110/20) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad y = -3 \quad -27a + 9b - 3c + d = 0$

$y = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad y = 6x \quad \cancel{6}\,27a - 6b + c = 6$

$y = 6ax + 2b$



$x = 0 \Rightarrow d = 0$
$c = 0$



$-27a + 9b - 3c + d = 0$ $\quad$ d u. c eing. $\quad y = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

$27a - 6b + c = 6$ $\quad$ Kurve?

$b = 2, a = \frac{2}{3}$

y	x
0	0
$2\frac{2}{3}$	1
18	2

$y' = 2x^2 + 4x$ $\quad$ 0-Stelle? bei $0; x; x = -2$

$y'' = 4x + 4$

Wendestelle: $x = -1$ (zweite Abl. $y = 0$)

110/21) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad P(1/4)$ = waagrechte Tgente

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad Q(0/2)$ Wendepunkt

$y'' = 6ax + 2b$

waagr. Tangente $\Rightarrow$ erste Abl. $= 0$

$3a + 2b + c = 0 \quad d = 2 \quad 3a + c = 0 \quad 2a = -2$

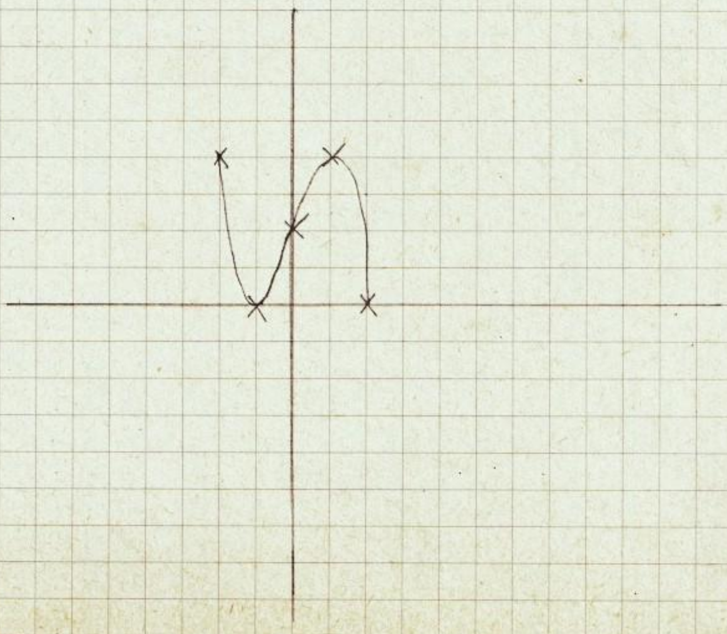
$a + b + c + d = 4 \quad b = 0 \quad a + c = 2 \quad a = -1$
$c = 3$

$\underline{y = -x^3 + 3x + 2}$

$y' = -3x^2 + 3$

$y'' = -6x$

Extremstelle: $y' = 0 \quad 3x^2 = 3$
$x^2 = 1$
$x_{1/2} = \pm 1$



110/22 $\overset{23}{}$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$-5 = d$

Extrempunkt: $3ax^2 + 2bx + c = 0$

$0 = a + b + c + d \quad | +$

$0 = 125a + 25b + 5c + d \quad | -$

$-124a - 24b - 4c = 0$

$125a + 25b + 5c = 5 \qquad 125a + 25b + 5c = a + b + c$

$a + b + c = 5$

waagrechte Tangente $y' = 0$ $\quad 75a + 10b + c = 0$

$$\begin{array}{l|l} a + b + c = 5 & + \quad \cdot 5 + \\ 125a + 25b + 5c = 5 & \quad\quad - \\ 75a + 10b + c = 0 & - \end{array}$$

$y = 0.2x^3 - 2.2x^2 + 7x - 5$

$$\begin{array}{l|l} -74a - 9b = 5 & \cdot 120 + \\ -120a - 20b = 20 & \cdot 74 - \end{array}$$

$y' = 0.6x^2 - 4.4x + 7$

$400b = -880 \quad a = 0.2 \quad c = 7$

$b = -2.2 \quad d = -5$

$y'' = 1.2x - 4.4$

$y' = 0$

$0.6x^2 - 4.4x + 7 = 0$

$x_{1/2} = \frac{4.4 \pm \sqrt{4.4^2 - 4 \cdot 7 \cdot 0.6}}{1.2} + \frac{4.4 \pm 1.6}{1.2} \left\langle \begin{array}{l} 5 \Rightarrow \text{Min.} \\ 2\frac{1}{3} \Rightarrow \text{Max.} \end{array} \right.$

Wendepunkt

110/22) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ P(0/-5)

Q(1/0)

R(5/0) berührt $\Rightarrow$ Tg $\Rightarrow$ erste Ableitung 0

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

$a + b + c + d = 0$

$d = -5$

$125a + 25b + 5c + d = 0$

$0 = 75a + 10b + c$

$a + b + c - 5 = 0$

$$\left|\begin{array}{l} 125a + 25b + 5c = 5 \\ a + b + c = 5 \\ 75a + 10b + c = 0 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} 25a + 5b + c = 1 \\ a + b + c = 5 \\ 75a + 10b + c = 0 \end{array} \begin{array}{|l|l} + & \\ - & + \\ & - \end{array}$$

$24a + 4b = -4 \quad | \cdot 9$

$-74a - 9b = 5 \quad | \cdot 4$

$216a + 36b = -36 \quad | +$

$-296a - 36b = 20 \quad | +$

$-80a = -16$

$a = +\frac{1}{5}, \; b = -\frac{11}{5}, \; c = 7 \rightarrow$ Gleichung

---

110/23) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ P(1/-2) Wendepunkt

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$ Q(2/0) Wende-t

$y'' = 6ax + 2b$ O(0/0)

$d = 0$

$$\left|\begin{array}{l} a + b + c = -2 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b + c = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ \\ - \end{array}$$

$m = 3a + 2b + c$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = (3a + 2b + c)(x - 1)$

$2 = (3a + 2b + c) \cdot 1$

$-2a - b = -4 \quad | \cdot 2 +$

$6a + 2b = 0 \quad +$

$2a = -8$

$\underline{a = -4} \quad \underline{b = 12} \quad \underline{c = -10}$

$\underline{y = -4x^3 + 12x^2 - 10x}$

110/25) symetrisch $\rightarrow$ nur gerade Exponenten

1) P(2/0) $\cap$ Wendetangente

2) Wendepunkt P $\rightarrow$ zweite Abl. = 0

3) Steigung bei $x = 2$ ist $-\frac{4}{3}$

$y = ax^4 + bx^2 + c$

$y' = 4ax^3 + 2bx$

$y'' = 12ax^2 + 2b$

110/26)

$y = ax^4 + bx^2 + c$

1) $P(0/-4)$
2) $Q(-4/0)$
3) Erste Ableitung = 0 bei Q

$y' = 4ax^3 + 2bx$

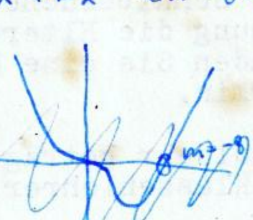
$y'' = 12ax^2 + 2b$

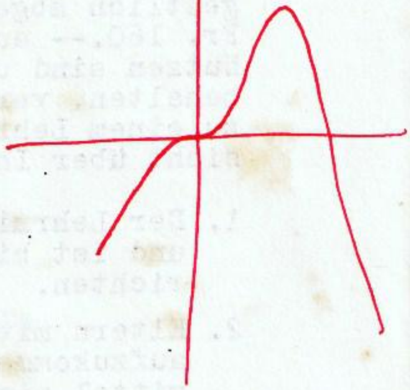
$-4 = c$

$0 = 256a + 16b + c$

110/27) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

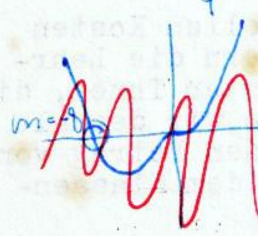
1) $O\,(0/0)$
2) für $x = 6$ ist $y' = 0$
3) für $x = 0$ ist $y' = 0$
4) für $x = 0$ ist $y'' = 0$





$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$



$\underline{e = 0}$

Wendepunkt in O → zweite Abl. = 0 ⇒ $d = 0$ $c = 0$

x6 waagrechte Tangente

$864a + 108b = 0$

$\underline{8a + b = 0}$

$y = ax^4 + bx^3$ wo 0?

$ax^4 + bx^3 = 0$

$x^3(ax + b) = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$ bei dieser Stelle Steigung -8

$-4 \cdot a \cdot \frac{b^3}{a^3} + 3\frac{b^3}{a^2} - 4\frac{b^3}{a^2}$

$\underline{\frac{b^3}{a^2} = 8}$

$8a + b = 0$ $b = -8a$

$\frac{b^3}{a^2} = 8$

$b^3 = 8a^2$

$-512a^3 = 8a^2$

$512a^3 + 8a^2 = 0$

$a^2(512a + 8) = 0$

$512a = -8$

$\underline{a = -\frac{1}{64}}$

$\underline{b = \frac{1}{8}}$

$\underline{y = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3}$

110/29) punktsym., wenn nur ungerade Exponenten. ③

$y = ax^5 + bx^3 + cx$ P(1|0) ist ein Wendepunkt.

$y' = 5ax^4 + 3bx^2 + c$ $\rightarrow 20a + 6b = 0$ (zweite Abl.)

$y'' = 20ax^3 + 6bx$ $a + b + c = 0$ (Funktionsgleichung)

$y = 7x \rightarrow c = 7$

$10a + 3b = 0$
$a + b = -7 \quad | \cdot 3$

$10a + 3b = 0 \quad | +$
$3a + 3b = -21 \quad | -$

$7a = 21$
$a = 3$

$b = -10$

$$\underline{\underline{y = 3x^5 - 10x^3 + 7x}}$$

110/31) $y = x^4 + bx^3 + cx^2$ zweite Abl. nur einmal $= 0$

$y' = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx$

$y'' = 12x^2 + 6bx + 2c \rightarrow 6x^2 + 3bx + c = 0$ nur eine Lösung

$x_{1/2} = $ Diskriminante $\sqrt{9b^2 - 24c} = 0$

$9b^2 - 24c = 0$
$3b^2 - 8c = 0$
$\underline{b^2 = \frac{8c}{3}}$ wo ist der Wendepunkt? dort, wo 2. Abl $= 0$

$x_{1/2} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24c}}{12}$

$\underline{\underline{x_{1/2} = -\frac{b}{4}}}$ einsetzen in ~~2. Abl~~ Bed.

$-\frac{b^3}{16} + \frac{3b^3}{16} - \frac{bc}{2} \neq 0$ $\frac{b^3}{8} - \frac{4bc}{8} \neq 0$ $\frac{b}{8}(b^2 - 1.5b^2) \neq 0$

$\frac{b}{8}(b^2 - 4c) \neq 0$ $-\frac{0.5b^3}{8} \neq 0$

33, 34

33a) Die 1. Abl darf nie 0 werden $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

b) y' darf genau einmal 0 sein.

34) $\underbrace{\text{Max., Min. od. Terr.-Punkt}}_{\text{1. Abl.} = 0}$

$y = ax^3 + bx + c$

$y' = 3ax^2 + b = 0$ bei $x = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}$

$b = 0 \rightarrow$ eine Lösung $\rightarrow$ Terr. Punkt

$b \neq 0 \rightarrow$ zwei Lösungen $\rightarrow$ Max. u. Min.

$y = \pm a \cdot \frac{b}{3a}\sqrt{-\frac{b}{3a}} \pm b\sqrt{-\frac{b}{3a}} + c = 0$

$y = \frac{4b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3a}} = -c$ $-16b^3 = 27ac^2$

$\sqrt{-\frac{b}{3a}} = -\frac{3c}{4b}$ $27ac^2 + 16b^3 = 0$

$-\frac{b}{3a} = \frac{9c^2}{16b^2}$

110/29) punktsym., wenn nur ungerade Exponenten.

③

$y = ax^5 + bx^3 + cx$

$y' = 5ax^4 + 3bx^2 + c$

$y'' = 20ax^3 + 6bx$

P(1/0) ist ein Wendepunkt.

$\Rightarrow 20a + 6b = 0$ (zweite Abl.)

$a + b + c = 0$ (Funktionsgleichung)

$y = 7x \Rightarrow c = 7$

$10a + 3b = 0$
$a + b = -7 \quad | \cdot 3$

$10a + 3b = 0 \quad | +$
$3a + 3b = -21 \quad | -$

$7a = 21$
$a = 3$

$b = -10$

$\underline{\underline{y = 3x^5 - 10x^3 + 7x}}$

110/31) $y = x^4 + bx^3 + cx^2$

zweite Abl. nur einmal $= 0$

$y' = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx$

$y'' = 12x^2 + 6bx + 2c \Rightarrow 6x^2 + 3bx + c = 0$ nur eine Lösung

$x_{1/2} =$ Diskriminante: $\sqrt{9b^2 - 24c} = 0$

$9b^2 - 24c = 0$

$3b^2 - 8c = 0$

$\underline{b^2 = \frac{8c}{3}}$

wo ist der Wendepunkt? dort, wo 2. Abl $= 0$

$x_{1/2} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24c}}{12}$

$\underline{\underline{x_{1/2} = -\frac{b}{4}}}$ einsetzen in ~~2. Abl~~ Bed.

$-\frac{b^3}{16} + \frac{3b^3}{16} - \frac{bc}{2} \neq 0$

$\frac{b^3}{8} - \frac{4bc}{8} \neq 0$

$\frac{b}{8}(b^2 - 4c) \neq 0$

$\frac{b}{8}(b^2 - 1.5b^2) \neq 0$

$-\frac{0.5b^3}{8} \neq 0$

33, 34

33a) Die 1. Abl. darf nie 0 werden $\qquad y' = 3ax^2 + 2bx + c$

b) y' darf genau einmal 0 sein.

34) Max., Min. od. Terr.-Punkt

$\underbrace{\qquad}_{\text{1. Abl.} = 0}$

$y = ax^3 + bx + c$

$y' = 3ax^2 + b = 0$ bei $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3a}}$

$b = 0 \Rightarrow$ eine Lösung $\Rightarrow$ Terr. Punkt

$b \neq 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $\Rightarrow$ Max. u. Min.

$y = \pm a \cdot \frac{b}{3a}\sqrt{-\frac{b}{3a}} \pm b\sqrt{-\frac{b}{3a}} + c = 0$

$y = \frac{4b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3a}} = -c$

$-16b^3 = 27ac^2$

$27ac^2 + 16b^3 = 0$

$\sqrt{-\frac{b}{3a}} = -\frac{3c}{4b}$

$-\frac{b}{3a} = \frac{9c^2}{\ldots}$

$y = ax^5 + bx^3 + cx$

$y' = 5ax^4 + 3bx^2 + c$

$y'' = 20ax^3 + 6bx$

P(1/0) ist ein Wendepunkt.

$\rightarrow 20a + 6b = 0$ (zweite Abl.)

$a + b + c = 0$ (Funktionsgleichung)

$y = 7x \rightarrow c = 7$

$10a + 3b = 0$
$a + b = -7 \quad | \cdot 3$

$10a + 3b = 0 \quad | +$
$3a + 3b = -21 \quad | -$

$7a = 21$
$a = 3$

$b = -10$

$\underline{\underline{y = 3x^5 - 10x^3 + 7x}}$

110/31) $y = x^4 + bx^3 + cx^2$ zweite Abl. nur einmal $= 0$

$y' = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx$

$y'' = 12x^2 + 6bx + 2c \rightarrow 6x^2 + 3bx + c = 0$ nur eine Lösung

$x_{1/2} = $ Diskriminante: $\sqrt{9b^2 - 24c} = 0$

$9b^2 - 24c = 0$

$3b^2 - 8c = 0$

$b^2 = \frac{8c}{3}$

wo ist der Wendepunkt? dort, wo 2. Abl $= 0$

$x_{1/2} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24c}}{12}$

$\underline{\underline{x_{1/2} = -\frac{b}{4}}}$ einsetzen in ~~2. Abl.~~

$-\frac{b^3}{16} + \frac{3b^3}{16} - \frac{bc}{2} \overset{\text{Bed.}}{\neq} 0$

$\frac{b^3}{8} - \frac{4bc}{8} \neq 0$

$\frac{b}{8}(b^2 - 4c) \neq 0$

$\frac{b}{8}(b^2 - 1.5b^2) \neq 0$

$-\frac{0.5b^3}{8} \neq 0$

33, 34

33a) Die 1. Abl. darf nie 0 werden $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

b) y' darf genau einmal 0 sein.

34) $\underbrace{\text{Max., Min. od. Terr.-Punkt}}_{\text{1. Abl.} = 0}$

$y = ax^3 + bx + c$

$y' = 3ax^2 + b = 0$ bei $x = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}$

$b = 0 \rightarrow$ eine Lösung $\rightarrow$ Terr. Punkt

$b \neq 0 \rightarrow$ zwei Lösungen $\rightarrow$ Max. u. Min.

$y = \pm a \cdot \frac{b}{3a}\sqrt{-\frac{b}{3a}} \pm b\sqrt{-\frac{b}{3a}} + c = 0$

$y = \frac{4b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3a}} = -c$

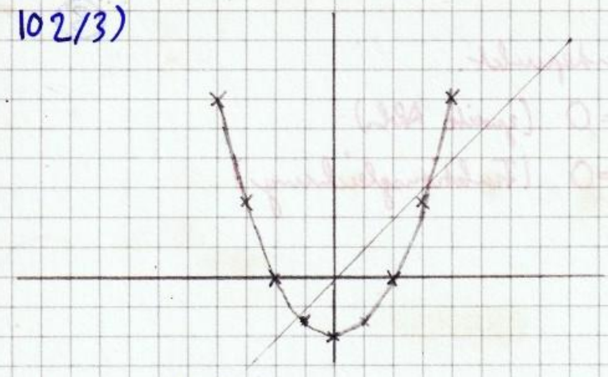
$\sqrt{-\frac{b}{3a}} = -\frac{3c}{4b}$

$-\frac{b}{3a} = \frac{9c^2}{16b^2}$

$-16b^3 = 27ac^2$

$27ac^2 + 16b^3 = 0$

102/3)



a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

$y' = x$

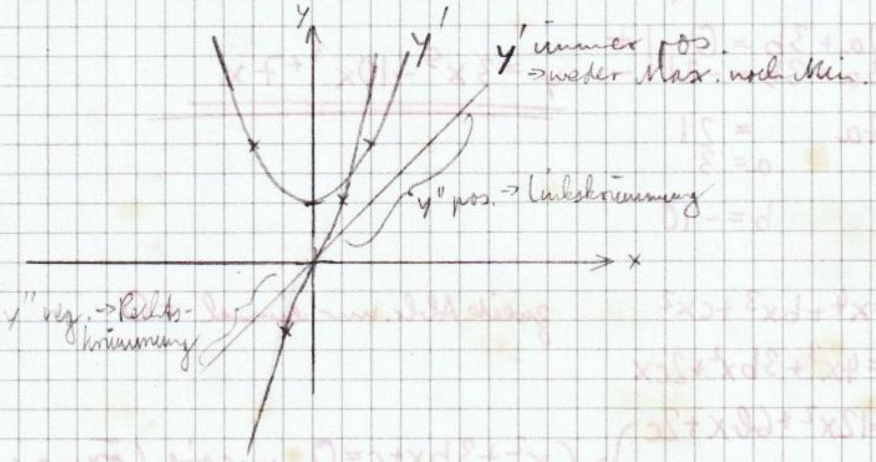
$y'' = 1$

$P(-x|y)$ $P(x|y)$

g) $y = \frac{1}{6}x^3 + 2x$

$y' = \frac{1}{2}x^2 + 2$

$y'' = x$



S.104) $\boxed{57}$ Ist $f'(x_1) = 0$ u. $f''(x_1) > 0 \rightarrow$ rel Min.

↳ Linkskrümmung

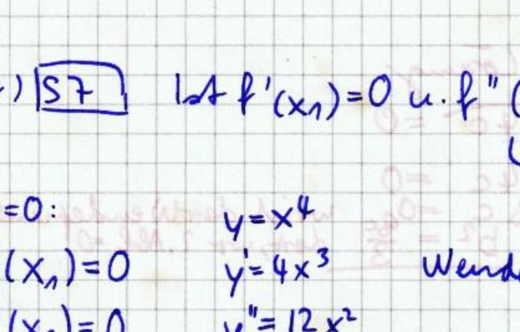
Min.

$x = 0$:

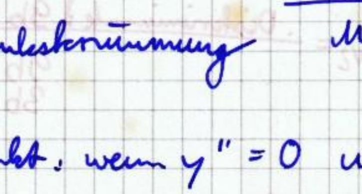
	$y = x^4$
$f'(x_1) = 0$	$y' = 4x^3$
$f''(x_2) = 0$	$y'' = 12x^2$
$f'''(x_3) = 0$	$y''' = 24x$
$f''''(x_4) \neq 0$	$y'''' = 24$

Wendepunkt: wenn $y'' = 0$ u. y''' nicht 0 ist.

Extremwertaufgaben



Volumen der Schachtel maximal wann?



$V = x(60-2x)(40-2x)$

$= (60x - 2x^2)(40-2x)$

$= 2400x - 120x^2 - 80x^2 + 4x^3$

$= 4x^3 - 200x^2 + 2400x$

$V'(x) = 12x^2 - 400x + 2400$

$V''(x) = 24x - 400$

Max: $y' = 0$ $y'' < 0$

$12x^2 - 400x + 2400 = 0$

$3x^2 - 100x + 600 = 0$

$x_{1/2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 1260}}{6} = \frac{100 \pm \sqrt{2800}}{6}$

$= \frac{100 \pm 52.92}{6}$ $\begin{cases} 25.49 & \text{unmöglich} \\ 7.847 \end{cases}$

→ einsetzen in zweite Abl.

$24_{\circ} \cdot 7.847 - 400 < 0$

$\rightarrow$ neg. $\rightarrow$ stimmt.

113/1)

$12 : 12-x \quad x$

$y = x(12-x)$
$= 12x - x^2$

$y' = -2x + 12$

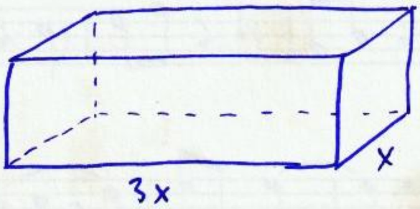
$y'' = -2$

$y' = 0$

$-2x + 12 = 0$

$\underline{\underline{x = 6}}$

2) a)



$x,\ 3x,\ 30-4x$

$V = 3x^2 \cdot (30-4x)$
$= -12x^3 + 90x^2$

$V' = -36x^2 + 180x$

$V'' = -72x + 180$

$a = 5cm$
$b = 15cm$
$c = 10cm$

$-36x^2 + 180x = 0$

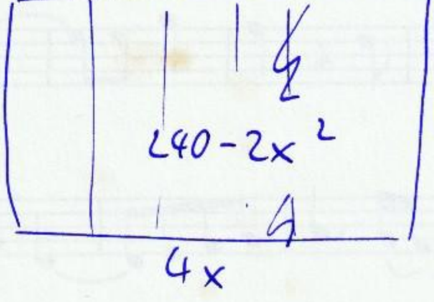
$x(-36x + 180) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$

b)

$O = 240cm^2$

$240 - 2x^2 =$ Mantel



h

$\frac{120 - x^2}{2x}$

$V = x^2\left(\frac{120 - x^2}{2x}\right) = 252.98\,cm^3$

$V = \frac{120x - x^3}{2} = -\frac{x^3}{2} + 60x$

$V' = -\frac{3x^2}{2} + 60$

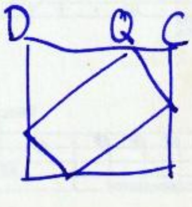
$V'' = -3x$

$40 = x^2$

$x = \pm\sqrt{40} \approx 6.3\,cm$

3ab, 4

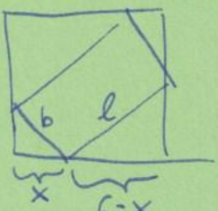
3a) $DQ = a \quad QC = b$



$a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} = y$

x	x^2	Δ
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0.25
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$0.\bar{2}\ldots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0.1875
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	0.16
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	0.09
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{225}$	$0.06\bar{2}\ldots$

U4 3a)



$F = x\sqrt{2} \cdot (6-x)\sqrt{2}$

$= x\sqrt{2} \cdot (6\sqrt{2} - x\sqrt{2})$

$= \cancel{\ldots}$

$F = 12x - 2x^2$

$F' = -4x + 12$

$F'' = -4$

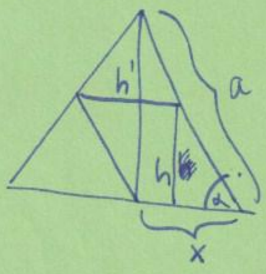
$-4x = -12$

$x = 3$

$\underline{b = 3 \cdot \sqrt{2}}$

$\underline{\underline{l = 3\sqrt{2}}}$ $\underline{\underline{b = l}}$

5) $a = 7\,cm$



$F = x \cdot h \quad \alpha = 60°$

$h' = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\frac{a}{2}\sqrt{3} : \left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - h\right) = a : x$

$\frac{x\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{a}{2}\sqrt{3} - h$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x) \quad F = \frac{x\sqrt{3}}{2}(a-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(ax - x^2)$

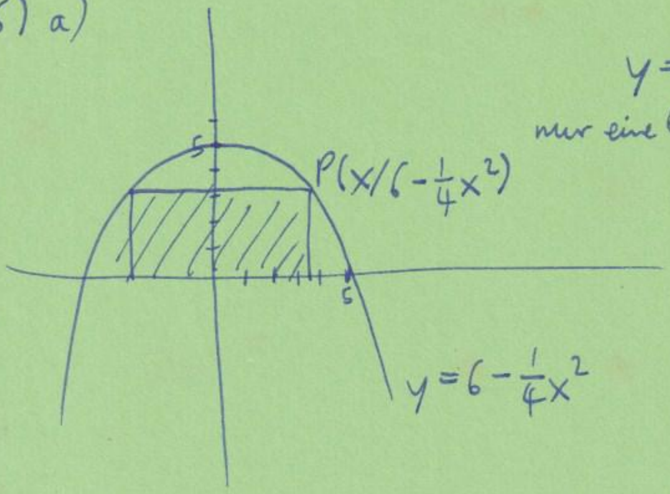
$F' = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - 2x)$

$F'' = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2) = -\sqrt{3}$

$2x = a$

$\underline{\underline{x = \frac{a}{2}}}$ Max.

6) a)



$y = 6 - \frac{1}{4}x^2$

nur eine Ecke wählbar

$U = 4x + 2(6 - \frac{1}{4}x^2)$

$U = 4x + 12 - \frac{1}{2}x^2$

$U = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 12$

$U' = -x + 4$

$U'' = -1 \quad U''$ neg., erste 0 → Max.

$\underline{\underline{x = 4}}$

$P(4/2) \quad \underline{\underline{U = 20}}$

$F = 2x \cdot (6 - \frac{1}{4}x^2)$

$F = 12x - \frac{1}{2}x^3$

$F' = -\frac{3}{2}x^2 + 12$

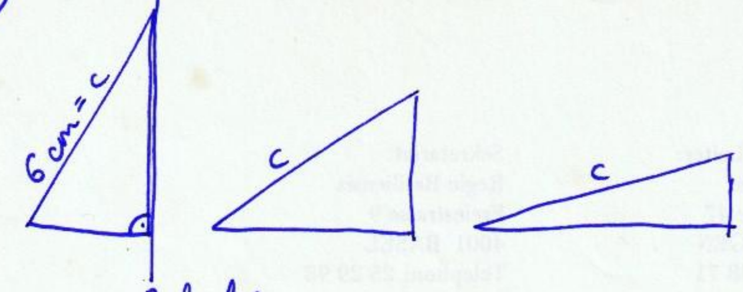
$F'' = -3x$

$\frac{3}{2}x^2 = 12$

$x^2 = 8$

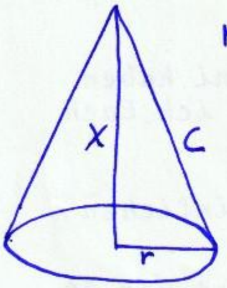
$\underline{\underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{8}}}$

114/8)



Drehachse

a) → Kegel wann am größten?



$r = \sqrt{36 - x^2}$

$V = \pi (36 - x^2) \cdot \frac{x}{3}$

$= (36\pi - x^2\pi) \frac{x}{3}$

$= 12\pi x - \frac{x^3}{3}\pi$

$V' = 12\pi - x^2\pi$

$V'' = -2x\pi$

$12\pi = x^2\pi$

$\underline{\underline{x = \sqrt{12}}}$ $\quad r = \sqrt{24}$

$V = \pi \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{12}}{3}$

$= \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{12}$

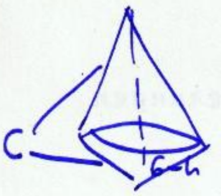
$= \pi \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3}$

$\underline{\underline{V = \pi \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}}$

b)

$\frac{x^2 \cdot h}{3} + \frac{x^2 (c-h)}{3} = \frac{1}{3}(\cancel{x^2 h} + 6x^2 - \cancel{x^2 h})$

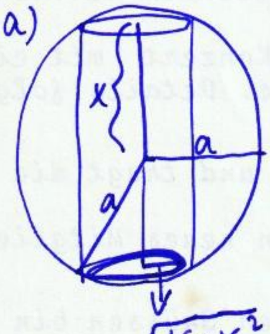
$= \frac{1}{3} 6x^2 = 2x^2$



$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ für Kegel

10)

a) $a = 4\,cm$



$\sqrt{16 - x^2} \to V$

$V = \pi (16 - x^2) \cdot 2x$

$V = (16\pi - \pi x^2) \cdot 2x$

$V = 32\pi x - 2\pi x^2$

$V' = -4\pi x + 32\pi$

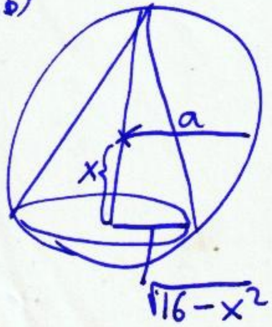
$V'' = -4\pi$

$-4\pi x + 32\pi = 0$

$x = +\frac{32\pi}{4\pi}$

$\underline{\underline{x = 8}}$

b)



$h = x + 4$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(16 - x^2)(x + 4)$

$= \frac{\pi}{3}(16x + 64 - x^3 - 4x^2)$

$= \frac{\pi}{3}(x^3 - 4x^2 + 16x + 64)$

$V = \frac{\pi}{3} x^3 - 4x^2 + 16x + 64$

$V' = \pi x^2 - 8x + 16$

$V'' = 2\pi x - 8$

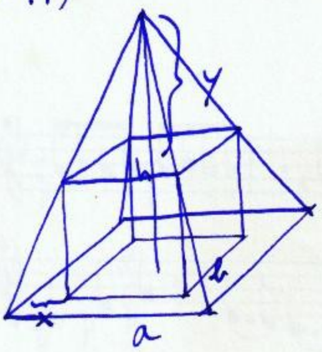
$\pi x^2 - 8x + 16 = 0$

$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{\pi}$

$\underline{\underline{x = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}}}$

11)

(14/11)



$V=(a-2x)^3$

$V=(h-y)^3=h^3-\overset{3}{4}h^2y+\overset{3}{6}hy^2-y^3$

$V=h^3-3h^2y+3hy^2-y^3$

$V=-y^3+3hy^2-3h^2y+h^3$

$V'=-3y^2+6hy-3h^2$

$V''=-6y+6h$ $\qquad b=\frac{2}{3}h$

$-3y^2+6hy-3h^2=0$

$-y^2+hy-h^2=0$

$y^2-hy+h^2=0$

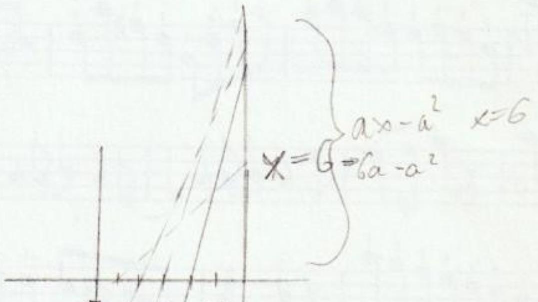
$(y+h)(y-h)=0$

12) a) $y=ax-a^2 \quad 0<a<6$

$y=6a-a^2$

$y'=6-2a \qquad 6-2a=0$

$y''=-2 \qquad a=3 \Rightarrow$ Max.



b) $ax-a^2$

$x=a$

$F=\frac{(6-a)(6a-a^2)}{2}=\frac{36a-12a^2+a^3}{2}$

$F'=\frac{3}{2}a^2-12a+18$

$F''=3a-12$ $\qquad$ Max: F'' neg.

$\underline{\underline{x=2}}$

$\frac{3}{2}a^2-12a+18=0$

$a_{1/2}=\frac{12\pm\sqrt{144-108}}{3}=\frac{12\pm 36}{3}$ $\begin{cases}6\\2\end{cases}$ 2 einsetzen in $F''\to$ neg $\Rightarrow$ Max.

$3x^3-7x^2-7x+3=0$

$3(x^3+1)-7x(x+1)=0$ $\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$3(x+1)(x^2-x+1)-7x(x+1)=0$

$(x+1)[3(x^2-x+1)-7x]=0$

$\underline{\underline{x_1=-1}}$

$3x^2-10x+3=0$

$x_{2/3}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}$ $\begin{cases}3\\ \frac{1}{3}\end{cases}$

$x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$

$\underbrace{x^2+3x+4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}_{3(x+\frac{1}{x})}=0$ $\quad (x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$x^2+3x+2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+2=0$

$(x+\frac{1}{x})^2+3(x+\frac{1}{x})+2=0$ $\quad x+\frac{1}{x}=y$

$y^2+3y+2=0$

$y_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=$ $\begin{cases}-1\\ \underline{\underline{-2}}\end{cases}$

$x+\frac{1}{x}=-1$

$x^2+x+1=0$ $\quad x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ $\quad x_{1/2}=1\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x+\frac{1}{x}=-2$

$x^2+2x+1=0$ $\quad x_{3/4}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\underline{\underline{-1}}$

$x^5-2x-1=0$ wieviele Möglichkeiten $\in \mathbb{R}$?

93/21) a) $x^4+x^3+2x-4=0$ $\quad \underline{\underline{x_1=1}}$ → Gleichung durch $(x-1)$ teilbar

$\underline{\underline{x_2=-2}}$ → durch $(x+2)$ teilbar

$(x-1)(x+2)$

$(x^4+x^3+2x-4):(x^2+x-2)=\underline{\underline{x^2+2}}$

$-(x^4+x^3-2x^2)$

$2x^2+2x-4$

$2x^2+2x-4$

$(x-1)(x+2)(x^2+2)=0$

$x^2+2=0$

$\underline{\underline{x_{3/4}=\pm i\sqrt{-2}}}$
